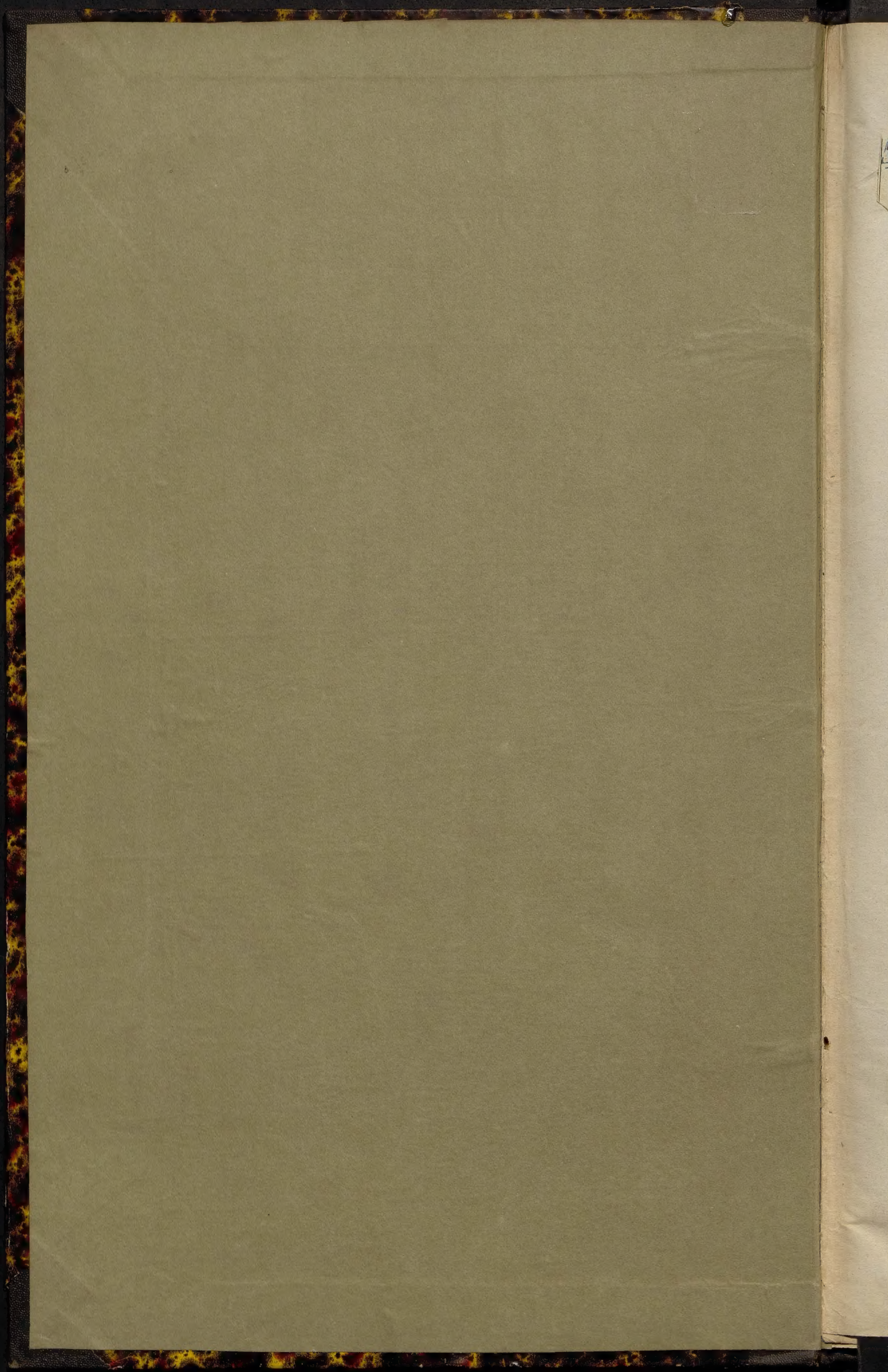


Ms. Inv. 4190.



(Dopetnienie Algebry
 mianowicie
 Rozwijanie potęg drugiej stopnia
 z dwiema niewiadomymi
 wypadających z podanych niewiadomych

Rękopis składa się
 z dwunastu arkuszy

51.
m
pi
ad
wa
ie
ty
m
g
p
d
m
a
p
v
m
v
p
p
A.
m
te
p
m
E
A
w
ca
a
ca
h
x
do

Wystąpienie Salu i prowadzenia wystawie z morim pod postawą

$0 = a + bx + cy + dx + 3xy + ex + 7y^2$
 Zamierzaję tutaj rozwiązanie w siódmach całkowitych, ma-

$x + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \dots$
 zatemowy warunek powiada, w zupełnego równania trylany, że po-
 trzeba na nieznaną x znaleźć ich poprawności lub prawie są, catherowile,
 ichy y byta równowierzebiez catherowile. Na ten Monie potiermy

$$p = a + b.x + c.x^2 + d.x^3 + \dots$$

$$q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots$$

a otrzymamy $y = -\frac{p}{g}$ $\frac{dy}{dx} = -p$
 Z ostatnich dwóch równań wyznosząc x z pomocą jak w Alg.,
 nie wahaniem, otrzymamy równanie postaci
 $A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + Fx^4 + Gx^5 + \dots$

$0 = A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + \dots$
 w kłosin, w poterymiki A, B, C, D, \dots są funkcjami wymiernymi
 współczynników pierwiastkowego równania $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$
 w poterymiki $n-4$ gu. uneto poterymiki są waroski

$$0 = A - Bq + Cq^2 - Eq^3 + Fq^4 - Gq^5 + \dots$$

W przypadku gdyby było $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ i t. d. równanie

W przypadku gdyby było $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ i t. d. równanie przeliczone tu sposobem toruizgranymby być nie mogło, bo q wypadnie nie racjonalne, od x t. j. $q=\alpha$, a to według x toruizgranembyć nie może! W tym razie potrzeba ustłować wyznaczyć się z równania $p=a+bx+cx^2+\dots$ i tak, i by p podnieść byłoby pmer α , jak nauczył Lagrange w dodatku do Algebry Eulera wydanej w Paryżu r. 1807 pour Garnier.

Chcącemy do przysposobienia na pomyślności.

1. Analizę dwóch liczb catkowitej, które ich iloczyn $x \cdot y$ jest równy 76, a suma ich kwadratów $x^2 + y^2$ jest równa 144, równa jest 76.

Ładanie to prowadzi do równania $5xy + 7y - 44x = 76$, z którego

$$y = \frac{76 + 44x}{5} = \frac{p}{q}$$

zatem $p = 76 + 44x$ a $q = 5$. Przejmując tych dwóch równań x , mającemy $0 = 72 + 44q - 5p$ czyli $0 = 72 + 44q - 5qy$, zatem $A = 72$.

$$\text{Licz } 72 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$$

Władze prosto do dzielników z obustronem na q , znajdziemy x catkowite tylko

$$\text{dla } q = 2 \dots x = -1 \text{ a potem } p = 92, \text{ wtedy następuje } \frac{p}{q} = y = 46$$

$$q = -8 \dots x = -3 \dots p = -56 \dots y = 7$$

$$q = -18 \dots x = -5 \dots p = -144 \dots y = 8$$

$$q = 12 \dots x = 1 \dots p = 120 \dots y = 10$$

$$q = 72 \dots x = 13 \dots p = 648 \dots y = 9$$

Podane więc zadanie ma tylko pięć następujących rozwiązań w liczbach catkowitych

$$x = -1, -3, -5, 1, 13$$

$$y = 46, 7, 8, 10, 9$$

w liczbach zaś catkowitych i dodatnich tylko dwa, a j.

$$x = 1, 13$$

$$y = 10, 9$$

2. Jakież są dwie liczby catkowite takie, że ich iloczyn jest równy 10, a suma ich kwadratów jest równa 144, równa jest 10, równa jest 144.

Oznaczmy pierwszą przez x a drugą przez y , według warunków zadania mamy następujące równanie

$$xy + 4x - 10 = 2x^2 + 5y$$

skąd

$$y = \frac{10 - 4x + 2x^2}{-5 + x} = \frac{p}{q}$$

$$\text{t.j. } p = 10 - 4x + 2x^2 \text{ a } q = -5 + x.$$

Przejmując z dwóch ostatnich równań x , znajdziemy $A = 400$. Dokładnie mi dzielnikami liczby 400 są: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400.

Ponieważ $x = \frac{p}{q}$, prosto władze za q każdy z tych dzielników z obu znakami i ratując tylko, wartości x catkowite, znajdziemy

$$\text{dla } q = 2 \dots x = 1 \dots p = 8 \text{ a skąd } y = 4$$

$$q = -5 \dots x = 0 \dots p = 10 \dots y = -2$$

$$q = 16 \dots x = 3 \dots p = 16 \dots y = 1$$

$$q = -40 \dots x = -5 \dots p = 80 \dots y = -2$$

$$q = 100 \dots x = 15 \dots p = 400 \dots y = 4$$

Rozwiązania prosto naprzec zadania są tylko następujące

$$x = 1, 0, 3, -5, 15$$

$$y = 4, -2, 1, -2, 4$$

w liczbach zaś catkowitych i dodatnich tylko trzy, mianowicie

$$x = 1, 3, 15$$

$$y = 4, 1, 4$$

Tym samym sposobem rozwiąż się zadania następujące:

3. Analizę dwóch liczb catkowitych, których suma jest równa 18, a iloczyn jest równy 76.

4. Analizę dwóch catkowitych liczb, których suma jest równa 18, a iloczyn jest równy 76.

5. Analizę dwóch liczb catkowitych, których suma i iloczyn są równymi 189.

W tym ostatnim zadaniu, znajdziemy pięć rozwiązań w liczbach catkowitych i dodatnich, mianowicie $x = 1, 3, 4, 6, 9$ i $y = 69, 34, 27, 19, 13$.

24

Тогут

myself

200

marci

the

7700

of part
of

21

1891

"e na

начи

way m

12

1/2

1794

2. 2. 2.

иной

... will

with her

u

2. *Myrica*

339, 2

both
general

100

dwóch micromacronych v i w ; a ponieważ jest tym sprowadzonym u i v , więc
 także znajdziemy także x, y, z . Tak np. potorywpy $u=18$ mamy
 $18^2=324=36 \cdot 9$, zatem $v=\frac{36}{2}=18$ a $w=9$, a z teni wartościami będzie
 $x=u+v=18+18=36$, $y=18+9=27$ a $z=18+18+9=45$; to też jest
 rzeczywiście $36^2+27^2=45^2$. Podobnie, potorywpy $u=6$, będzie
 $36=4 \cdot 9$, zatem $v=2$ a $w=9$, zaś $x=8$, $y=16$, $z=20$ jeżeli
 $8^2+16^2=20^2$.

Wn. 1859, podał J.B. Sturm, jako wygłoszone w "Archiv der Mathematik",
 wydawane przez Gruenerla no Grifswald, w tomie XXXIII na stron. 92, mój
 prześladający sposób rozumienia potrudniejszego nas do rozumienia. W
 niego doszły potory $x=2n+1$, $y=2n(n+1)$ a $z=2n(n+1)+1$ i biorąc n do
 dyfuzji całkowitej i dodatniej, aby z każdą wariancją otrzymać rozumienie
 w momencie każdego rozumienia; bo każda nieparzysta liczba może być roz-
 pona na sumę dwóch kwadratów, np. $2p+1=(p+1)^2-p^2$, będzie więc
 dla liczby $2p+1$ sama kwadratem i jeżeli potory $2p+1=(2n+1)^2$, plus przypadek
 $p=2n(n+1)$ i następuje $(2n+1)^2=\{2n(n+1)+1\}^2-\{2n(n+1)\}^2$, t.j.
 $(2n+1)^2+\{ \frac{4n(n+1)}{2} \}^2=\{ \frac{4n(n+1)}{2}+1 \}^2$.

§9. Z podobnych rozumień micromacronych, możemy jeszcze podać w "Nouvelle
 Annales de Mathematiques par Terquem et Gerono" w tomie IX na stron. 11

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1 &= u^2 \\ x^2-y^2-1 &= v^2 \end{aligned}$$

Które usiłujemy rozumieć w liczbach wymiernych. Oj, wprawy drugie co przed
 wprawy rozumienia, znajdziemy $2y^2=u^2-v^2$, a potorywpy $y=pq$, będzie
 $u^2-v^2=(u+v)(u-v)=2p^2q^2$, a dla tego obojna potory $u+v=2p^2$ a $u-v=q^2$
 z których równań wypada $u=\frac{2p^2+q^2}{2}$ a $v=\frac{2p^2-q^2}{2}$. Wówczas wartości
 y, u, v w przeciwstawnych równań, daje

$$x^2+p^2q^2-1=\left(\frac{2p^2+q^2}{2}\right)^2, \text{ plus } x^2=\frac{q^4+4p^4+4}{4}.$$

Warunkiem żeby x^2 było całkowitym kwadratem, albo x wymiernym jest,
 żeby było $4p^4=4q^2$ t.j. żeby było $\frac{q^2}{p^2}=\frac{1}{p^2}$, a którego warunkiem znajdziemy

$$x^2=\frac{p^8+4p^4+4}{4}=\left(\frac{p^4+2}{2}\right)^2$$

$$\text{zatem } x=\frac{p^4+2}{2}=1+\frac{p^4}{2}$$

Tę wartość x otrzymamy także

$$y=p^3, u=p^3+\frac{p^4}{2} \text{ a } v=p^3-\frac{p^4}{2}$$

Naroda wymiernej liczby potorywa tu p , da nam wartości x, y, u, v rozumie-
 nym potory rozumienia w liczbach wymiernych. Jeżeli więc wprawy
 $p=2$, znajdziemy $x=9$, $y=8$, $u=12$ a $v=4$. Jest też rzeczywiście

$$81+64-1=144$$

$$81-64-1=16$$

§10. Aby przyszedłmy już do naszego trójmianu $x^2+3x+yx^2$ i polecając go posty-
 powano żeby go umieścić do całkowitego kwadratu. A jeśli już tak, to
 niechajże $x^2+3x+yx^2$ jest równym do całkowitego kwadratu, a to ob-
 raczając $x^2+3x+yx^2$ jako kwadrat, to będzie $x^2+3x+yx^2=k^2$, a otrzymamy

$$x^2+3x+yx^2=x^2+3yx^2+yx^2$$

Jeżeli więc $\frac{3}{2}$ czyli trójmian $x^2+3x+yx^2$ do całkowitego kwadratu, to ten trój-
 mian $x^2+3yx^2+yx^2$ jest równym do całkowitego kwadratu, a to ob-
 raczając $x^2+3yx^2+yx^2$ jako kwadrat, to będzie $x^2+3yx^2+yx^2=k^2$, a otrzymamy
 równanie $x^2+3yx^2+yx^2=k^2$. Mówi tu być kilka przypadek z
 tych jeżeli byłby najprościej, a następuje najprościej umiarkowanie proste.
 Przypadek pierwszy. W pierwszym trójmianie, może być y liczbą kwadratu
 niech tak nie $y=k^2$. W takim razie potorywpy $\sqrt{x^2+3x+yx^2}=\sqrt{x^2+3x+k^2x^2}=\sqrt{x^2+3x+k^2x^2}$

Wskazanie potężenia trójmianu na trynomic, otrzymamy
 $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \sqrt{x(p+q)(x+q)} = t(x+p)$ skąd otrzymamy
 $x(x+p)(x+q) = t^2(x+p)^2$ czyli $x(x+q) = t^2(x+p)$ t.j. $x = \frac{t^2 p - q}{t^2 - 1}$

(Z tej wartości x , otrzymamy
 $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = t(x+p) = \frac{t(p-q)}{t^2 - 1} = \frac{ht}{t^2 - 1}$ bo $p-q = \frac{h}{t}$

Tak więc jeżeli widzimy podał warunki na x takie żeby trójmian $5+14x+8x^2$
^{do kwadratu} był kwadratem, t.j. $\alpha=5, \beta=14, \gamma=8$; ponieważ $\beta^2-4\alpha\gamma=36$, więc $h=6$
 a następnie $p=\frac{5}{4}, q=\frac{1}{2}$, jeżeli $x = \frac{5t^2-16}{32-4t^2}$. Wziwmy tu $t=2$, najdrobniej
 $x = \frac{1}{4}$ a następnie $\sqrt{5+14x+8x^2} = \frac{6}{2} = 3$.

Chcąc więc mieć pożądaną wartość, nie podawajmy ich kwadratom
 promy 2 , ponieważ ^{wie} nam się, że kwadrat 2 skądś taki, który ornam
 w tym x a więc x mamy do rozwiązania równanie

$$x^2 = 2x - 2 = 2(x-1) = 2(x+1)(x-1)$$

Więc więc potoryć $x = \sqrt{2(x+1)(x-1)} = t(x+1)$, skąd się najdrobniej $x = \frac{t^2+2}{2-t^2}$ gdzie
 można wziąć skądś od upodobań kwadratu, lubo nie bardzo dla wypadku intencyj
 Wziwmy $t = \frac{3}{2}$, będzie $x = \frac{17}{2} = 8.5$ a $2.17^2 - 2 = 24.5$ potoryć $t = \frac{11}{10}$
 najdrobniej $x = 99$ zaś $2.99^2 - 2 = 140$ i t.d.

Drugim i ostatnim przykładem, które tu wskazać zamierzam, jest ten
 jeżeli, bo wielkiego nakładu i próbowania, wpadłoby odczytać warunki
 a także, że trójmian $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ czyli ^{do kwadratu} kwadratem, jeżeli α jest

dwumianem $\alpha + \beta x^2$ wprost, przy pomocy tej wartości x można
 niephonierować kwadratem. Tak: jeżeli dla $x=k$ jest $\alpha + \beta k + \gamma k^2 = k^2$,
 potoryć $x = k + z$ a otrzymamy $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \sqrt{k^2 + (\beta + 2\gamma k)z + \gamma z^2}$ t.j.
 jeżeli k jest nam trójmianem na innym w którym k jest w drugim wiel
 którym przykładem, α jest kwadratem, przed potoryć w

$$\sqrt{k^2 + (\beta + 2\gamma k)z + \gamma z^2} = k + tz \text{ gdzie } k^2 + (\beta + 2\gamma k)z + \gamma z^2 = k^2 + 2ktz + t^2 z^2$$

skąd $z = \frac{\beta + 2\gamma k - 2kt}{t^2 - \gamma}$, a zaś $x = k + z = k + \frac{\beta + 2\gamma k - 2kt}{t^2 - \gamma} = \frac{kt^2 + \beta + \gamma k - 2kt}{t^2 - \gamma}$
 także za t dowolnie bierzemy. Tak np. trójmian $7+5x+2x^2$ dla $x=2$ jest kw
 drugim kwadratem, t.j. $7+5.2+2.2^2=25$ więc $k=2$ a $K=5$; będzie jeżeli
 $x = \frac{7-10t+2t^2}{t^2-2}$ a dla $t=3$, $x = -\frac{3}{7}$. Z tej wartości na x mamy

$$\sqrt{7+5x+2x^2} = \sqrt{7-5.\frac{3}{7}+2(\frac{3}{7})^2} = \frac{16}{7}$$

§ II. Ale już i dosyć tych choćby przyporządkowań matematycznych
 byczych, przedziś branych dawnych dla rozwiązania równania drug
 go stopnia i dla innych do ścisłości naczyniem. Później one mogą
 być już za starożytności do jakich sposobów wiek nasz przed Lagrange
 do depozycji ramienia celu, oraz mogą im nastrzyżone inne wygod
 je a nawet myślowości. Takich sposobów, takich można wiele
 w Algebrze Eulera i w dziełach dawniejszych autorów. Zapro
 ję na poprzednio myślowości, oraz powołajmy się na przykład
 nie magię, że przytoczmy tego wyobrażenia, powracam do równ
 nia na którym staliśmy, t.j. do równania drugiego stopnia
 praconego i do postaci $u^2 - At^2 = B$ wprowadzonego, a w którym
 $u = 2fx + \beta$, $t = 2fy + ex + c$, $A = 4f^2$, $B = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Dalej jest
 $\alpha = c^2 - 4af$, $\beta = 2ce - 4bf$, $\gamma = e^2 - 4df$. Następnie a, b, c, \dots i
 nikami równania ogólnego $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fy^2 = 0$

Jżeli chcemy wykazać, że $u = At^2 + B$ było
tylko wymierne, wystawie je sobie można jako sprzeczne do
jednostkowego mianownika, a ellakiego potęgowy $u = \frac{x}{z}, t = \frac{y}{z}$,
pamiętając tylko o tym, że x i y mają być wzajemnie pierwsze,
niezawisłe, ponieważ próbowanie przyjdzie

$$x^2 - Ay^2 = Bz^2$$

Kłose nam rozwiązać potrzeba i w którym x, y, z są pod postawą liczb
całkowitych.

Skim do rozwiązania przystąpimy, zrobimy tu niektóre uwagi
potrzebne nad tem próbowaniem uwagi

Pierwszą uwagę jest ta, iż trzy liczby x, y, z nie mają żadnego wspólnego
dzielnika, gdyż by go bowiem miały, doszłoby tylko przez niego pro-
ściej całe równanie aby się go pozbyć.

Powtóre przypuszczenie można i należy, że dwie liczby A i B nie mają
żadną czynnik kwadratowego; gdyż by bowiem było inaczej i np.
 $A = A'K^2$ a $B = B'K^2$, doszłoby tylko potęgi $Ky = y'$ a $Kz = z'$ aby otrzy-
mać równanie $x^2 - A'y'^2 = B'z'^2$ w którym żadna z liczb A' i B' nie
ma czynnika kwadratowego.

Potrzebie, dwie którekolwiek z nieznanych x, y, z , nie mogą
żadnego wspólnego dzielnika; przypuszcimy bowiem że x i y
mają dzielnik z , dzieląc by się musieli ten dzielnik i z , co według pierwszego
uwagilibyśmy nie może. Nie dzieli też i B według drugiej uwagi, sa-
mym x i y są pierwszemi między sobą. Któż samego powodem tak
 x i z , jako też y i z są pierwszemi między sobą.

Powtórnie, przypuszczenie pierwsze, zawsze można się A i B dodać, a
to przez z sobie sami, otrzymany tylko trzy równania
potęgowa $x^2 - Ay^2 = Bz^2$, $x^2 - Ay^2 = -Bz^2$ i $x^2 + Ay^2 = Bz^2$

Ala drugie z tych równań przechodzi w trzecie przez proste
wzajemne wyrazów, trzecie zaś rozmnóżony przez B , otrzymany,
 $Bx^2 + AB y^2 = B^2 z$, a potęgi $AB = A'$ a $B^2 = z'$ przechodzi na rów-
nanie $z'^2 - A'y'^2 = Bx'^2$ i. równanie pierwsze postać.

Z tych uwag wniesiemy że pierwsze równanie drugiego stopnia
z dwiema nieznanymi, zawsze sprowadzić można do postaci

$$x^2 - Ay^2 = Bz^2$$

w którym A i B są dodatnimi i wolne od czynników kwadratowych,
jakiśby mieć mogły.

Do rozwiązania tego równania podał Lagrange sposób, a
podrażnia się na czynniki, zmniejszanie współczynników A i B
dopóki, dopóki jeden z nich nie stanie się ± 1 , a w takim razie
rozwiązanie odbywa się już zapomocą znajomych, a więc już dnia,
tania przygotowanych wzorów. Bo rzekniesz, przypuszcimy
żeśmy w ciągu poprzedniego zmniejszania współczynników A i B
przypili do równania $x^2 - y^2 = Bz^2$, albo do $x^2 - Ay^2 = z^2$, to
znajemy, że tem samym równaniem bo są te same postacie, a więc
współczynniki $x^2 - y^2 = Bz^2$. Liczby B rozłożymy na dwa czynni-
ki x i B , które będą pierwszemi między sobą, bo B nie ma żadnego czyn-
nika kwadratowego. Pomyślimy sobie także z rozłożone na dwa
czynniki p i q tak że $z = pq$, tedy to równanie napiszemy
w postaci

$$(x+y)(x-y) = \alpha \beta p^2 q^2$$

a następnie wrzucić $x+y = \alpha p^2$ i $x-y = \beta q^2$ gdzie $x = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2}{2}$ a $y = \frac{\alpha p^2 - \beta q^2}{2}$
a następnie wrzucić $x = pq$

Tym sposobem wartości x, y, z wyrażone przez dwie nieornane
~~nie~~ ^{powinno} p i q które byłyby były tak obrane iżby ~~całkowicie~~ wartości
 x i y były liczbami nieparzystymi, drugi jest współzależny z
 normami p i q , a otrzymamy $x = \alpha p^2 + \beta q^2$, $y = \alpha p^2 - \beta q^2$, $z = 2pq$.
 Ażeby było B było w normalny sposób może być dostarczone na dwa
 trymity, zatem dla normalnych prory otrzymamy rozwiązanie tego
 równania. Niekiedy np. było równanie $x^2 - y^2 = 50z^2$, tedy, ponieważ
 $50 = 1.50 = 2.25 = 5.10$, otrzymamy różne wrory jak następuje

$$\begin{aligned} x &= p^2 + 50q^2 & y &= p^2 - 50q^2 & z &= 2pq \\ x &= 2p^2 + 25q^2 & y &= 2p^2 - 25q^2 & z &= 2pq \\ x &= 5p^2 + 10q^2 & y &= 5p^2 - 10q^2 & z &= 2pq \end{aligned}$$

Biorąc potem za p i q dowolne liczby całkowite, otrzymamy jak w
 naszym nieskończonym ciągu rozwiązań równania $x^2 - y^2 = 50z^2$ tak
 w liczbach całkowitych.

§12. Ale powracamy do naszego równania $x^2 - Ay^2 = Bz^2$. Niechbyśmy mieli
 nosić, przypuściliśmy, że liczbą współzależnych z drugiej strony z ,
 B jest wielokrotnością A, więc nie musimy stronić od rozwiązania i z tego powodu

dużo jedynie byłoby dla pewnej symetryczności, przedstawić je dwa w postaci
 trymity między sobą, więc równanie do rozwiązania

$$x^2 - By^2 = Az^2$$

z warunkiem że $A \nmid B$. Wyżej w uwagach dowiedzieliśmy, że x i y są względnie
 między sobą, a dlatego również y i A są względnie między sobą, mając to
 wiem, gdyby miały dzielnik wspólny np. d , ten podzieliłby także musi A i p
 co x i y nie byłyby względnie między sobą.

Gdybyśmy znali wartości x i y np. $x = M$, $y = N$ rozwiązując ostatnie
 równanie, tedy, ponieważ y i A względnie N i A są względnie między sobą, rozwiązując
 można, rozwiązanie przez stopnia $M = Nn - Ay'$, w którym n i y' są
 ma, nieornanymi, w liczbach całkowitych. Atakując je jest może brzemieniem dla
 tych dwóch wartości x i y , zatem chcąc je wyrazić nam nieornane, w postaci
 prawie potężnej można ogólnie $x = ny - Ay'$ gdzie, jak się wie, n i y'
 są dwiema nieornanymi całkowitymi liczbami. Te wartości na x potęg
 w przy pomocy tego równania i podzielić je przez A , znajdziemy

$$\frac{n^2 - By^2 - 2ny'y' + Ay'^2}{A} = z^2$$

Ponieważ y i A są względnie między sobą, zatem, jeżeli z to rozwiązanie
 mać może, musi być $n^2 - B$ podzielne przez A , bo z drugiej strony jest liczbą
 całkowitą z^2 . Z tego warunku widzimy, że naturalny dzielnik $n^2 - B$ byłoby
 liczbą całkowitą, miałobyśmy więc równanie $x = ny - Ay'$ byłoby jedną z
 zmian, y' której wartości naturalnych są tego równania

Aby dopełnić warunków $\frac{n^2 - B}{A} =$ liczbą całkowitą, drugi jest próbować
 potęgą n liczbą nie większą od $\frac{1}{2}A$, bo każda wartość powyższej potęgi
 zmniejsza o jakąś wielokrotność liczb A , (zatem nie nadzwyczajny
 ten liczbom) n będzie ~~xxxx~~ wartości ~~np~~ n wynosi $\frac{n^2 - B}{A}$ liczbą całkowitą
 tedy powyższą w przy końcu zmniejsza o hA , gdzie ona $n \pm hA$
 a powyższe w przy wyrażenie na x zamieni się na $x = n'y - A(y' \pm h)$, co wyraża
 na potęgami wartości x , znajdziemy $\{n'y - A(y' \pm h)\}^2 - By^2 = Az^2$, a następnie

$$\frac{n^2 - B}{A} y^2 - 2n(y' \pm h)y + A(y' \pm h)^2 = z^2$$

co wyraża podobnie że powyższe nie
 zmniejszenie n o hA nie wpływa na potęgę $n^2 - B$ przez A ; Dla
 próbując różne liczby n , dostatecznie jest brać takowe byłoby w granicach
 o $\frac{1}{2}A$. Gdyby się w tych granicach nie znalazła liczba dopełniająca,
 myślimy, że warunku, z prawości twierdzenia możemy nie dane równanie nie
 może być rozwiązane w liczbach całkowitych.

F. podzielnosć
 $n^2 - B$ przez A

§13.

Wobec braku danych o wartościach x i y , nie możemy wyznaczyć wartości x i y z równania $x^2 + y^2 = 284$

$$x^2 + y^2 + 2(x+y) - 54y + 21 = 0$$

Ponieważ jest to równanie kwadratowe względem x , a nie y , więc możemy wyznaczyć x z równania $x^2 + y^2 = 284$

$$2x - 54 + 2 = \sqrt{214^2 - 284 - 104}$$

t.j. $x = -104$, $y = -28$ a $z = 21$. Potem wyznaczamy t z równania $2x - 54 + 2 = t$, gdzie

$$2x + 214^2 - 284 - 104 = t^2$$

To równanie rozwiążemy względem y , dając

$$214 - 14 = \sqrt{2380 + 21t^2} \quad \text{gdzie } A = 21 \text{ a } B = 2380.$$

F. Ponieważ

$$2380 = 2^2 \cdot 595$$

więc możemy

$$2z = \xi, \text{ gdzie}$$

równanie do

$$\xi^2 - 21\eta^2 = 595\xi^2$$

próbowanie

$$\xi^2 - 21\eta^2 = 2380\xi^2 \text{ t.j. } x^2 - By^2 = Az^2$$

Potem

$$\xi = \eta v - \frac{2380}{595} v' / x = \eta y - \frac{A}{595} y' / \text{a znajdziemy}$$

$$\eta^2 - 21v^2 - 2\eta v v' + \frac{2380}{595} v'^2 = \xi^2$$

Dla $n = 49$ jest

$$\frac{\eta^2 - 21}{595} = 2^2 \text{ t.j. } \eta^2 - 21 = 2^2 \text{ a równanie niepełne}$$

$$4v^2 - 2 \cdot 49 v v' + \frac{2380}{595} v'^2 = \xi^2$$

Wobec tego równanie ma

$$A'k^2 = 4 \text{ i dodając i odejmując } 49^2 v'^2 \text{ od pierwszej strony}$$

$$\xi = \eta v - \frac{2380}{595} v' \text{ gdzie } \xi = 49v - \frac{2380}{595} v'$$

Potem wyznaczamy

$$4v - 49v' = \xi' \text{ a } k\xi' = 2\xi' = \xi'', \text{ otrzymamy nowe równanie}$$

$$\xi'^2 - 21v'^2 = \xi''^2$$

i tym sposobem powróćmy do poprzedniego

$$\xi'^2 - \xi''^2 = 21v'^2$$

Próbując na 21 na dwa czynniki t.j. na 3 i 7 , tudzież potym wyznaczamy

$$(\xi' + \xi'')(\xi' - \xi'') = 3 \cdot 7 p^2 q^2$$

Skąd znajdziemy, stąd $\xi' + \xi'' = 3p^2$ a $\xi' - \xi'' = 7q^2$, $\xi' = 3p^2 + 7q^2$, $\xi'' = 3p^2 - 7q^2$ a

Wracając teraz do wartości x i y , potym wyznaczamy $p = 2$ a $q = 1$ a otrzymamy

$$\xi' = 19, \xi'' = 5, v' = 4. \text{ Potem z równania } 4v - 49v' = \xi', \xi'' = 2\xi', \text{ znajdziemy } v = 215$$

$$\xi' = 5. \text{ Dalej, z równania } \xi = 49v - \frac{2380}{595} v', \text{ otrzymamy } \xi = \frac{1015}{4} \text{ gdzie}$$

$$u = \frac{\xi}{5} = 203, t = \frac{v}{5} = 43, \text{ a następnie z równania } u = 214 - 14, \text{ otrzymamy}$$

$$y = \frac{21}{3}, \text{ zaś z równania } 2x - 54 + 2 = t, \text{ znajdziemy } x = \frac{139}{3}.$$

Wobec tego wartość na y , czyli pierwszy trygon, pod zastąpieniem

$$x = \frac{139}{3} \text{ i } y = \frac{21}{3} \text{ otrzymamy wartość } \sqrt{214^2 - 284 - 104} = 43, \text{ nie zaś wartość}$$

$$x = \frac{139}{3} \text{ i } y = \frac{21}{3} \text{ otrzymamy wartość } \sqrt{214^2 - 284 - 104} = 43, \text{ nie zaś wartość}$$

możemy stąd wartość do poprzedniego równania:

$$\text{Dla } \frac{\eta^2 - 21}{595} \text{ wystarczy dla } n = 49, \text{ ale dla } n = 189 \text{ jest } \sqrt{214^2 - 284 - 104} = 43, \text{ nie zaś wartość}$$

$$\frac{189^2 - 21}{595} = \frac{415}{595} = 15.2 \text{ gdzie } A' = 15 \text{ a } k^2 = 15.2 \text{ dla większego } p \text{ i } q \text{ otrzymamy}$$

podobny rezultat przez podzielenie poprzedniego rachunku, przeprowadzimy

$$\text{z tej wartości } n.$$

$$\text{Równanie } \xi = \eta v - \frac{2380}{595} v', \text{ przy } \xi = 189v - \frac{2380}{595} v', \text{ a równanie } \xi^2 - 21v^2 = 595\xi^2$$

$$\text{na } 215v^2 - 2 \cdot 189 v v' + \frac{2380}{595} v'^2 = \xi^2, \text{ które otrzymamy przy } A'k^2 = 15.2 \text{ oraz dodając}$$

$$\text{i odejmując na pierwszej stronie } 189^2 v'^2, \text{ znajdziemy}$$

$$(60v - 189v')^2 - 21v'^2 = 15\xi'^2 = 15.2\xi''^2$$

a potym wyznaczamy $\xi' = 60v - 189v'$ tudzież $k\xi' = \xi''$ czyli $2\xi' = \xi''$, otrzymamy nowe równanie

$$\xi'^2 - 21v'^2 = 15\xi''^2 \text{ t.j. } x^2 - By^2 = Az^2$$

Atak B > A więc do poprzedniego rachunku musimy bierzyć równanie $\xi'^2 - 15\xi''^2 = 21v'^2$

Twar potrzemy $\xi' = n\xi'' - 21\xi'''$ i otrzymamy krótszą i le. pośrednią drogę
$$\frac{n^2-15}{21}\xi'' - 2n\xi''\xi''' + 21\xi'''^2 = \xi'^2$$

Dla $n=6$ jest $\frac{n^2-15}{21}=1$ t.j. krótki i łatwiejszy dla czego $\xi' = 6\xi'' - 21\xi'''$, a ostatecznie
równanie przechodzi na $\xi''^2 - 2.6\xi''\xi''' + 21\xi'''^2 = \xi'^2$, do którego pierwszej strony
dodawamy i odjęwmy $6^2\xi'''^2$, będzie

$$(\xi'' - 6\xi''')^2 - 15\xi'''^2 = \xi'^2$$

A potrzywszy tu $\xi'' - 6\xi''' = \xi'$, tudzież $\xi''\xi''' = \xi'$ czyli $\xi' = \xi''$, otrzymamy
$$\xi''^2 - 15\xi'''^2 = \xi'^2$$

i tu już jest konie przesłuch, bo $\xi''^2 - \xi'^2 = 15\xi'''^2$. Potrzywszy 15 na dwa
czynnik 1.15 lub 3.5 i bierzemy drugi dwa czynnik, tudzież wstawia $\xi''' = pq$
otrzymamy $\xi'' + \xi' = 3p^2$ a $\xi'' - \xi' = 5q^2$ stąd $\xi'' = 3p^2 + 5q^2$, $\xi' = 3p^2 - 5q^2$, $\xi''' = 2pq$

Dla powrócenia do x, y , potrzywszy tu $p=2, q=1$ a znajdziemy
 $\xi'' = 17, \xi' = 7, \xi''' = 4$. Z temi wartościami mamy
 $\xi'' = \xi' + 6\xi''' = 41, \xi' = \xi'' - 6\xi''' = 162$. Z temi 3 wartościami
mianowicie ξ', ξ'', ξ''' mamy $\xi = \frac{\xi' + 189\xi''}{2051} = \frac{2051}{41}$ a $\xi' = \frac{\xi''}{41}$. Następnie
 $\xi = 189\xi'' - 2051\xi' = 2051$, przeto $u = \frac{\xi}{41} = \frac{2051}{41}, t = \frac{99}{41}$. Z temi wartościami
natomiast mamy $y = \frac{u+14}{21} = \frac{2625}{21.41} = \frac{125}{41}$ a $x = \frac{t+54-2}{2} = \frac{64}{41}$.

F. Wartości ξ' dla n w pięć, w pięć razie
miejliłoby być
jak widzieliśmy
49 i 189, ale
wypisaliśmy
wartość w ogół,
nie wypisujemy
595 i 49,
w drugim razie
współstnie
wartość w ogół,
nie
213 i 6
czyli w
rachunku
 $\frac{n^2-21}{595}$ i
 $\frac{n^2-15}{21}$ licząc
krami i cztwó,
wielmi.

Tak otrzymamy wartości x i y wprowadzając w pełne wolne równanie, pro-
konamy już się radość czyż nie są to równania?
Kładąc w wyrażeniach na ξ'', ξ' i ξ''' inne i to dowolne wartości na p i q
na każdymi razem przyjdziemy do wartości x i y również, czyli są to równania
nie, ale naturalnie coar innych, tak je sobie rozważa i będzie miastem
czonę dla każdej wartości n . F

Nawet o sprowadziliśmy równanie do rozwiązania równania
Drugiego stopnia, a mianowicie mówimy o trójniam $\alpha + \beta x + \gamma x^2$
dotychczas kwadratem, w trzecim przypadku jeżeli przytędzili my 2α
zgodnie z właściwościami kwadratu, podając jego kwadrat od jego 2 , poroż-
ji na resztę liczb kwadratowa. Rozważenie to wymaga, toteż wyrażymy
 x , i bierzemy $2x^2 - 2$ było dotychczas kwadratem, aby to rozważenie rozwiązać
przezobem Lagrange, dożyj jest potrzyj $A^2 + B = 2x^2 - 2$. Potrzywszy tu
 $2x^2 - 2 = u^2$ a resztę $x = \frac{u}{2}, u = \frac{u}{2}$, a otrzymamy równanie do rozwiązania

$$2\xi^2 - 2\xi'^2 = u^2$$
 czyli $\xi^2 + 2\xi'^2 = 2\xi'^2$ w którym już widziemy $B=A$ i
opracuj tego B jest odjemne. Potrzywszy tu $u = n\xi + 2\xi'$ a znajdziemy
$$\frac{n^2+2}{2}\xi^2 + 2n\xi\xi' + 2\xi'^2 = \xi'^2$$
 gdzie $\frac{n^2+2}{2}$ powinno być liczbą całkowitą dla n nie
wielkiego jak $\frac{1}{2}A$ t.j. $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, a dlatego n nie może być innym liczbą jak 0, 6,
Dzie więc ostatecznie równanie $\xi^2 + 2\xi'^2 = \xi'^2$ czyli $\xi^2 - \xi'^2 = 2\xi'^2$. $2 = 1.2$ pot-
rzywszy przeto $\xi' = pq$, znajdziemy ją w poprzednich przykładach

$$\xi = 1.p^2 + 2q^2, \xi' = 1.p^2 - 2q^2$$
 a $\xi' = 2pq$
Dla $p=1$ i $q=1$, znajdziemy $\xi = 3, \xi' = -1$, przeto $x = \frac{\xi}{2} = -3$ a $2x^2 - 2 = 2.9 - 2 = 16 = 4^2$
a dla $p=3, q=2$ będzie $\xi = 17, \xi' = 1$, zatem $x = 17$ a $2x^2 - 2 = 2.17^2 - 2 = 576 = 24^2$ i t.d.

Stądże wartości na x i bierzemy trójniam $\gamma + 15x + 13x^2$ wyznacza do, $F. 2^2.13^2 - 139$
którym kwadratem, bierzemy ponieważ $\alpha = 7, \beta = 15, \gamma = 13$, znajdziemy 2 wro-
row na początku, zamieściliśmy $A = 52 = 4.13 = 2^2.13$ a $B = -139$, a
następnie $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 52 + 15x + 13x^2$ i warun-
dotychczas kwadratem, bierzemy $A^2 + B = 52^2 - 139 = 2704 - 139 = 2565$ i warun-
nie do potrzyjmy u i bierzemy $u = \xi$ a $t = \frac{u}{2}$ będzie $F. \xi^2 + 139u^2 - 2^2.13^2$
dotychczas kwadratem, Potrzywszy $u = \xi$ a $t = \frac{u}{2}$ będzie $F. \xi^2 + 139u^2 - 2^2.13^2$
czyli $\xi^2 - 2^2.13^2 = -139u^2$. Ale ponieważ $B = 2^2.13$ ma czynnik kwadra-
towu 2^2 zatem potrzywszy 2^2 a bierzemy $\xi^2 - 139u^2 = -139\xi'^2$

$F. 2^2.13^2 - 139\xi'^2$
 $\xi^2 - 2^2.13^2 = -139\xi'^2$

(*) § 14. Już się poprzednio wspominało, że jeżeli jeden z warunków w poprzednich
 wnioskach $\frac{n^2-B}{A} = \text{cath}$, $\frac{n^2-B}{A'} = \text{cath}$, $\frac{n^2-B}{A''} = \text{cath}$, ... $\frac{n^2-C}{B} = \text{cath}$, i t. d. nie jest dopuszczalnym
 równaniem $x^2 - By^2 = Az^2$ c. następnie i rozwiązanie którego to ostatnie w poprzednim
 było nie może być rozwiązaniem w liczbach wymiernych. Ale, skoro by było najdziej
 już takie liczby n i n' catkowite, że dwa warunki $\frac{n^2-B}{A} = \text{cath}$ i $\frac{n^2-A}{B} = \text{cath}$ są dopet-
 niwani, można dowieść, na ośm się tu nie ratujemy, że i trzeci warunek $\frac{n^2-A'}{B} = \text{cath}$
 oraz wszystkie następne będą mogły być dopełnionemi. Trzy pierwsze poprzednie są
 warunki są dopełnionemi do rozwiązania się o rozwiązanie możliwości lub niemoż-
 ności rozwiązania któregoś równania namyknącego trzy nieznane x, y, z .
 Tak np. w poprzednim § mieliśmy równanie do rozwiązania $Ax^2 + B = u^2$ czyli
 $2 \cdot 13t^2 - 139 = u^2$, którego przypisaliśmy do równania $\xi^2 - 13\omega^2 = -139\xi^2$. Otóż dwa wa-
 runki do dopełnienia są: $\frac{n^2-13}{139} = \text{cath}$ i $\frac{n^2+139}{13} = \text{cath}$. a których pierwszy dla $n=11$, a dru-
 gi dla $n=2$ wymię wycywiścić liczbami catkowitemi; dla tego też i trzeci warunek
 $\frac{n^2+2}{13} = \text{cath}$, bo $A'=-3$, jest dopełnionym biorem $n'=6$ i równanie już rozwiązaliśmy mo-
 gło być rozwiązaniem.

Kiedy więc równanie postać $ax^2 + by^2 = cz^2$ będzie mogło być rozwiązaniem
 jeżeli jeden z współczynników a, b, c , nie ma wymiara kwadratowego, a mianowicie
 są je dwa a, b ; a, c ; b, c , nie mają wspólnego dzielnika, tzn. jeżeli
 najdziej trzy catkowite liczby λ, μ, ν , dopełniającego następnych trzech warun-
 ków $\frac{a\lambda^2+b}{c} = \text{cath}$, $\frac{c\mu^2-b}{a} = \text{cath}$, i $\frac{c\nu^2-a}{b} = \text{cath}$. Te warunki wyprowadzą z odpowie-
 dnich $\frac{n^2-B}{A} = \frac{n'^2-A}{B} = \frac{n''^2-A'}{B}$ skoro dane równanie normujemy przez
 $\frac{c}{\lambda}$ i następnie napiszemy: $(\frac{cz}{\lambda})^2 - b(\frac{y}{\lambda})^2 = ac$, bo widzimy że $A=ac$, $B=bc$ a więc dwa
 ostatnie warunki będą $\frac{n^2-ac}{bc} = \text{cath}$ i $\frac{n^2-bc}{ac} = \text{cath}$. Póty wpy $n=c\mu$ a $n'=c\nu$ tzn
 i warunki przjdą na $c\mu^2-b$ i $c\nu^2-ba$. Aby trzeci warunek wyrazić ledy powiemy wiadomo
 że $n^2-B = AA'k^2$ czyli $c\mu^2-b = aA'k^2$. Ale ak^2 i bc nie mają żadnego wspólnego dzielnika,
 pusto ostatni warunek będzie dopełnionym, jeżeli $\frac{ak^2n^2-c\mu^2-b}{bc} = \text{cath}$. Żeby zaś licznik mógł
 być podzielny przez b , musi być ak^2n^2 podzielny także przez b . Póty wpy tu z drugiego

warunku $v^2 \text{ pa } a$, musi być $K^2 v^2 - p^2$ podzielnym przez 6, co dla niewiadomych pa, p, v, nie może, podobnie będzie na n' kolejnej wariancie, gdyż $K v^2 - p^2 = \text{cathe}$. Per li więc w równaniu $x^2 - 3y^2 = A^2$. A i B nie mają wspólnego dzielnika, t.j. gdyby w pierwszym równaniu było $c=1$, trzeci ten warunek deputuje się przez 3 i nie może. Per li też A i B mają jakiś wspólny czynnik, to w tym przypadku d. putnie jeżeli mamy i ten trzeci warunek t.j. $ax^2 + b$, albo krócej $ax^2 + b$.

Wziąwszy tu za przykład równanie $3x^2 + 5y^2 = 47z^2$ do którego zastosujmy trzy powyższe warunki, tedy znajdujemy $\frac{ax^2 + b}{c} = \frac{3x^2 + 5y^2}{47}$, $\frac{ax^2 + b}{c} = \frac{47x^2 - 5y^2}{3}$ i $\frac{v^2 - a}{b} = \frac{47v^2 - 3}{5}$. Pierwszy wyrażenie będzie ściśle całkowite dla $\lambda = 47x \pm 22$, drugie dla $\mu = 3\beta \pm 1$ a trzecie dla $v = 5\gamma \pm 2$ biorąc za x, y, z odpowiedni dzielnik całkowite, a dla tego dane równanie rozwiązaniem były może i to nawet w liczbach całkowitych.

Cheby je rzeczywiste rozwiązać, możemy mu nadać trojęb postać, mianowicie $3x^2 + 15y^2 = 141z^2$ t.j. $x^2 + 5y^2 = 47z^2$ wtedy $3x = x$, albo $5y^2 + 15x^2 = 235z^2$ t.j. $y^2 + 5x^2 = 235z^2$ -- $5y = y$, lub nareszcie $47z^2 - 141x^2 = 235y^2$ -- $z^2 - 141x^2 = 235y^2$ -- $47z = z$, Rozwiązuje się ostatnie $z^2 - 141x^2 = 235y^2$ gdzie $n^2 - 141 = 37$ dla $n = 94$, a potorywszy $y = y$, przechodząc -- $z^2 - 37y^2 = 141x^2$. Tu już $n^2 - 37 = 7$ dla $n' = 32$, po czym przechodząc -- $z^2 - 7x^2 = 37y^2$, gdzie $n^2 - 7 = 2$ dla $n'' = 9$, a następnie przechodząc -- $z^2 - 2y^2 = 7x^2$, stąd już $n^2 - 2 = 1$, dla $n''' = 3$, a ostatnie równanie przechodząc -- $z^2 - x^2 = 2y^2$. Ponieważ $2 = 2 \cdot 1$, więc potorywszy $z = pg$, a najedniemy wiadomym sposobem $z^2 = 2p^2 + g^2$, $x^2 = 2p^2 - g^2$, $y^2 = 2pg$. Dla $p=1$ i $g=1$, b.d. otrzymujemy $z=3$, $x=1$, $y=2$ a z powyższych wzgledu przechodząc do następnego równania, przyjdziemy do następnych wartości $x = \frac{1365}{37}$, $y = 50$ a $z = \frac{695}{37}$, stąd $\frac{y}{x} = \frac{370}{273}$, $\frac{z}{x} = \frac{139}{273}$. Wziąwszy więc, co wolno, $x = 273$, będzie $y = 370$, $z = 139$. Wobec tego rozwiązuje się dane równanie mianowicie dla $p=2$, $g=1$, najedniemy się już do $x = 5549$, $y = 4514$, $z = 2033$. i t.d. Ponieważ to danem równaniem dyktuje Kullerbach, nie możemy, zatem złożyć z jejami obecnymi x, y, z , nie mając (1) następnego try 55 i posunąć o 1.) w potęgi na rozwiązanie.

Ponieważ znaliśmy $ax^2 + b = k$; a $ax^2 + b = y$, odjęwszy pierwsze od drugiego równania, znajdziemy $a(x+h)(x-h) = (y+k)(y-k)$. To równanie możemy

$$ap(x+h) = q(y+k)$$

$$q(x-h) = p(y-k)$$

(Z tych dwóch równań znajdziemy łatwo

$$x = \frac{2kpq}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)h}{ap^2 - q^2}$$

$$y = \frac{k(ap^2 + q^2)}{ap^2 - q^2} - \frac{2ahpq}{ap^2 - q^2}$$

Ta robota stała się dla nas do celu, bo mamy znaleźć x i y całkowite, my przyporządkowaliśmy do wartości x i y wyrażenia całkowite. Takie wyrażenia są potrzebne, aby dowiedzieć się, czy dane p i q dają całkowite wartości x i y pod postaciami liczb całkowitych.

~~Przejdźmy~~ Od powiódźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością. W tym celu należy znaleźć takie m i n , aby $ax^2 + b = y$ było równoważne $ay^2 + c = m^2$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

$$m^2 = \frac{ap^4 + 2ap^2q^2 + q^4}{ap^2 - 2ap^2q^2 + q^4}, \quad n^2 = \frac{4p^2q^2}{ap^2 - 2ap^2q^2 + q^4}$$

W tym celu należy znaleźć takie m i n , aby $ax^2 + b = y$ było równoważne $ay^2 + c = m^2$, gdzie c jest całkowitą wielkością. W tym celu należy znaleźć takie m i n , aby $ax^2 + b = y$ było równoważne $ay^2 + c = m^2$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

a potem licząc, że $an^2 + 1 = m^2$, wtedy mamy liczbę całkowitą $x = nk - mh$ a następnie $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych. Aby otrzymać nowe rozwiązanie z poprzedniego, należy wziąć za h , $nk + mh$ i za k , $mk + nah$, bo z temi wartościami h i k otrzymamy nowe rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$.

W tym celu należy znaleźć takie m i n , aby $ax^2 + b = y$ było równoważne $ay^2 + c = m^2$, gdzie c jest całkowitą wielkością. W tym celu należy znaleźć takie m i n , aby $ax^2 + b = y$ było równoważne $ay^2 + c = m^2$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

Przejdźmy do pytania, czy dla danych p i q istnieje całkowite rozwiązanie x i y równania $ax^2 + b = y$ pod postaciami liczb całkowitych, nasuwa się raz na myśl, pociągnięcie wyrażenia $ax^2 + b$ do postaci $ay^2 + c$, gdzie c jest całkowitą wielkością.

$xq^2 - p^2 = -1$ t.j. miarownik, wspólny obu wartościom, stani się $= -1$, a za
nie wartości przyległa następny

$$x = -2kpq + h(xq^2 + p^2) + \beta q^2$$

$$y = -k(xq^2 + p^2) + 2xhpk + \beta pq$$

A ponieważ w równaniu $\alpha + \beta h + xh^2 = k^2$ ilość k tylko się w kwadracie znajduje
wyszedł więc jest jedno czyli w równaniu tej ilości dodatnie lub ujemne; i dlatego
wartości x i y będą ostatecznie

$$x = 2kpq + h(xq^2 + p^2) + \beta q^2$$

$$y = k(xq^2 + p^2) + 2xhpk + \beta pq$$

Które z pewnością dopełnia warunek $\alpha + \beta x + yx^2 = y^2$

Wzrosty np. dane równanie $8 + 5x + 3x^2 = y^2$, tedy potęgę
 $x = h = 1$, najmniejszą $8 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 16$ zatem $k = 4$. Wówczas $xq^2 + 1 = p^2$ czyli
 $3q^2 + 1 = p^2$ dopełniamy biorąc $q = 1$ i najmniejszą $p = 2$, podobnie w równie
wyższe dane równanie $8x: x = 4k + xh + 5$, $y = xk + 12h + 10$ z których
wypadają następne równania, które są ośmiu nowymi wartościami x i y , z których
poprowadzają x a z k poprowadzają y .

$$x = 1, 28, 401, 556, 77953 \text{ i t. d.}$$

$$y = 4, 60, 696, 9694, 135020 \text{ i t. d.}$$

Atakże rozwiązania nierówności w porównaniu na x i y dwadzieścia pięć moria,
z których wystawimy ogólnie rozwiązanie następnie

$$x = h, A, B, C, D, E, \text{ i t. d.}$$

$$y = k, P, Q, R, S, T, \text{ i t. d.}$$

jest niewątpliwie $A = nk + mh$ gdzie m i n świadczą o warunku $yn^2 + 1 = m^2$

$$B = nP + mA$$

$$P = mk + ynh$$

$$C = nQ + mB$$

$$Q = mP + yna$$

$$D = nR + mC$$

$$R = mQ + ynb$$

$$E = nS + mD$$

$$S = mR + ync$$

$$E' = nT + mE$$

$$T = mS + ynd$$

i t. d.

Próbujemy je
dwóch czyli

Ponieważ te wartości są, jak widzimy, według pierwszego prawa, oraz że
dopełniają warunek, że ani x ani y ani h ani k nie są ujemne, więc nie możemy
z dostrzeżonego prawa wyprowadzić, że te wartości są prawdziwe
następnych wartości. Zatem, ponieważ np

$$E = nS + mD = n(mR + ync) + m(nR + mC) = 2mnR + (yn^2 + m^2)C, \text{ a } nR = D - mC$$

$$\text{bądź zatem } E = 2mD - 2m^2C + yn^2C + m^2C = 2mD - (m^2 - yn^2)C. \text{ Lecz } m^2 - yn^2 = 1$$

$$\text{zatem } E = 2mD - C$$

$$\text{Podobnie, } T = mS + ynd = mS + yn(nR + mC) = mS + yn^2R + ymnc$$

$$\text{Lecz } ynC = S - mR, \text{ zatem}$$

$$T = mS + yn^2R + mS - m^2R = 2mS + (yn^2 - m^2)R = 2mS - R \text{ bo } yn^2 - m^2 = -1$$

Atakże widzimy, że każde następne wartości x i y są najmniejszą z dwóch poprzednich
dwóch nie potrzebując warunków jak wyżej, i również z dwóch poprzednich
wartości y i najmniejszą następnych niepotrzebując warunków x .

§16. Czego co się dotyka powiedzieliśmy o rozwiązaniu równania $ax^2 + b = y^2$ a
zatem i równania $x^2 - By^2 = Ax^2$ zwiędziliśmy jakimi manowcami myśleć
długo naradzić do jego rozwiązania w liściach euklidesowych. Wypadało atak
używania, byłoby łatwiejsze, gdybyśmy do każdej liście x nie mogli
znaleźć innej liście, żeby $an^2 + 1 = m^2$. Cóż więc rozwiązanie równania
 $ax^2 + b = y^2$ zależy od równania $an^2 + 1 = m^2$; rozwiązanie tej równania
 $x^2 - By^2 = Ax^2$ zależy od rozwiązania $x^2 - Ay^2 = 1$, przy czym ostrożniej się wypadać tu liście

Few liście
euklidesowych

A nie może być ani kwadratem ani liść ujemny, gdyżby w takim razie
 $Ay^2 + 1$ nie mogło być kwadratem, bo nie może dwóch liść kwadratów być
między siebie, tylko o 1, a iloczyn an^2 dwóch kwadratów, jest także kwadratem.

[illegible]

Angielski matematyk Pell, podał na Leu Morice sprosób który w pokre-
 jist baro moralnym, ^(a nie oryginalnym) ~~Pell~~ ^{Pell} ~~klawirze~~ ^{klawirze} a mowcy, a wreszcie baro stuzego
 rachunku wymagajacym. Ktoby dzie urozumijsz pomał sprosób Pella, wci mój, ^{to} ~~to~~
 no jeden przypadek t.j. ze mamy małeś kławy n tak, icelby $13n^2 + 1$ byto dz
 kwadratem; wiec tu $a = 13$ i powinno byci $13n^2 + 1 = m^2$.

Wnioś, jak widzimy $m \geq 3n$, zatem potrzebny $\sqrt{3n^2+1} = 3n+p$, a więc mamy
 $n = \frac{3p + \sqrt{3p^2+4}}{4} \geq \frac{6}{4}p \geq p$, a dla tego potrzebny mowa $n = p+q$ t.j. potrzebny

$$p+q = \frac{3p + \sqrt{13p^2 - 4}}{4} \text{ czyli } p+4q = \sqrt{13p^2 - 4} \text{ plus majacemy } p = \frac{2 + \sqrt{13q^2 + 3}}{3}$$

$p > \frac{2+39}{3} > 9$, allazgo potrimy $p \leq 9+x$, t. j.

$$q+r = \frac{q+\sqrt{13q^2+43}}{3} \text{ czyli } 2q+3r = \sqrt{13q^2+43} \text{ skąd } q = \frac{2r+\sqrt{13r^2+3}}{3}, \text{ więc}$$

2) $\frac{2r+3r}{3} > r$, potwimy, że $q = r+s = \frac{2r+\sqrt{13r^2-3}}{3}$; $r+s = \sqrt{13r^2-3}$

$$s+t = \frac{s+\sqrt{13s^2+4}}{4}$$
 przy $r = \frac{s+\sqrt{13s^2+4}}{4}$

$t = \frac{3u + \sqrt{13u^2 + 4}}{4} \left\{ \frac{6u}{4} \right\}$ ujemno potoczny daj: $t = u + v$, a otrzymamy
 $u = \frac{v + \sqrt{13v^2 - 3}}{3} \left\{ \frac{4v}{3} \right\} v$ i dlatygo.

$$u+4v = \sqrt{13u^2+4}, \text{ plus } 4 \text{ fois } u = 5. \quad 2v+3x = \sqrt{13v^2+3}. \text{ 4 fois } v = 1$$

drzemy $u = v + x = \frac{3}{2x + \sqrt{13x^2 + 2}} \cdot \frac{x}{x}$ i dla tego podstawiamy $v = x + y$, a będzie

$$x+y = \frac{2x + \sqrt{13x^2 + 3}}{3} \text{ crypt } x+3y = \frac{-\sqrt{13x^2 + 3}}{4} \text{ plug } x = \frac{4 + \sqrt{13y - 9}}{4} \text{ into } y = 3x + \sqrt{13x^2 + 1} \text{ plug}$$

$$x = y + z = \frac{y + \sqrt{13y^2 - 4}}{4} \text{ albo } 3y + 4z = \sqrt{13y^2 - 4}, \text{ p\u0142y} \ y = 3z + \sqrt{13z^2 + 1}. \text{ W\u0142\u0105stny}$$

do takiego jak ostatnie wyrażenia, gdzie oczywiście widzimy, co poprzedziło. $x = 9 + 2 = 11$ jest dobitnym kwadratem, podobnie

za Z i rury chłodnicy pod ciśnieniem jest doskonałym kwaradrem, pasuje
przebieganie fiz. Mon'ca. A gronic war. o stałości wartości na y , potory wy
 $Z=0$, otrzymamy $y=1$, a rotun' liry, cat'owit, więc wracasz do wartości

many: $x = y + z = 1 + 0 = 1$, $v = x + y = 2$, $u = v + x = 3$, $t = u + v = 5$,

$s = 6t + u = 33$, $r = s + t = 38$, $q = r + s = 71$, $p = q + r = 109$, e narafkan

$n = p + q = 180$ więc $m = 649$. Najmniejszą liczbę dopuszczającą się,

menten $13n^2 + 1 = m^2$ geeft hierboven 180, en analiseer nu zij sporobem problemen

gner Della nicnato morozne i ten moroz a rofuzca lirlbz a conuz
 a = 67. najimnijpemi lirlbanu dlogutnia jzicem

$n = 29653980$, $m = 1766319049$.

warum $6n^2+1=m^2$ für $n=22653980$, $m=1766319049$.

Aly mezonog morate opredzie, utocano sablice majmny psych kurb m m
L.T. i. p. gub. An²-1-m² dle gozmpch kurb a, oklorych w dat,

do pierwszego warunku $an^2 + 1 = m^2$, dla różnego niż a , otrzymujemy $0 \leq m^2$
 b. m. ciężej powiemy.

Wzrost $m^2 \cdot an^2 = 1$ albo $an^2 - m^2 = -1$, lub, co najwyżej, $an^2 - m^2 = 1$, lub, co najwyżej, $an^2 - m^2 = 1$.

rownanie $m^2 - an^2 = 1$ albo $an - m = -1$, tuc, to najpierw wyznaczmy m i n z równania $x^2 - Ay^2 = 1$, podał je p. Formet, francuzki matematyk, anglistom

wnanie $X - Ay^2 = 1$, podał jeszcze twierdzenie, że dla dowolnego
matematyka, do rozwiązania w pierbach całkowitych; rozwiązań

alebi rozwinął je dopiero Lagrange w całej ogólności i siłach matematyki,

ismij. Do bezkriticznego powierzenia mi tego przysięgi mi.

J. J. Young.

§17. Ponieważ, rozważanie racjonalnego pierwiastka opiera się na atomach ciągłych, przeto i nam, jeżeli się potrzeba do tego. Skłanjając w Arystotelesie, atomu cięgiele do wyizgania pierwiastka kwadratowego, skoro nie będzie kwadratami; dostrzeżliśmy, kamie, że ~~kwadrat~~ pierwiastek nie, wymiorny, rozwinięty na atomach ciągłych, przedstawić, za pomocą atomów, pierwiastek wymiorny, izgany się bierze koniec. Ta pierwiastek wynosić pomogła nam być do tego, że znalazłszy jeden całkowity pierwiastek, oznaczliśmy, że rachunki przeliczyć, dowolnie atomach i tym sposobem znalazliśmy, przybliżony pierwiastek, tak do dokładnej, jak sobie byłoby, i zrygliśmy, lub jak potrzeba, wyizgata, na różnego pierwiastki, żadnej nie uwzględniemy uwagi. Tak np. szukajcie $\sqrt{47}$, $\sqrt{19}$ i $\sqrt{67}$, znajdziemy:

$$\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \text{i t. d.}$$

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \text{i t. d.}$$

$$\sqrt{67} = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \text{i t. d.}$$

W pierwiastku z tych atomów, widzimy pierwiastek mianownikowy 1, 5, 1, 12, w drugim 2, 1, 3, 1, 2, 8, a w trzecim 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 5, 16. Co więcej dostrzeżemy, nawet w tych mianownikach symetryczności, opuszczenie ostatniego mianownika pierwiastka; tak np. w drugim możemy nieparzyste liczby wyrzucić, bo 5, podstawowy mianownik jest 3, a po obu jego stronach stoją symetrycznie mianowniki 1, 2, w trzecim, także nieparzyste liczby wyrzucić, ponieważ, podstawowy mianownik jest 7, a z jednej i drugiej jego strony idą symetrycznie w przeciwnych kierunkach mianowniki 1, 1, 2, 5. Gdyby pierwiastek, per se, ostatniego wyrazu, storony był z parzystych liczb wyrzucić, zamieściłby jednego podstawowego byłoby dwa pola równe a inne po obu ich stronach symetrycznie storonione, jak to, widzieć można, w następujących atomach

$$\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \dots$$

$$\sqrt{61} = 7 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \dots$$

W dalszym ciągu, zabraćmy, i tak pierwiastek, jeżeli jest symetryczny, ośmić atomów, wyrażających niewymiernie pierwiastki kwadratowe, np. $\sqrt{10}$, niewymiernie.

§18. Z użyciem w Arystotelesie sposobu wyizgania pierwiastka kwadratowego, za pomocą atomów ciągłych, już wiadomo, i rozwinięciu pierwiastka, albo ogólniej mówiąc, niewymierniej ilości \sqrt{A} na atomach ciągłych, zależy, na wyznaczeniu całkowitych liczb $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n$ zawartych w wyrażeniu

$$\sqrt{A} = x + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}$$

tak, żeby sprawdziły równania $\sqrt{A} = a + \frac{1}{x}, x = a_1 + \frac{1}{x_1}, x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}, \dots, x_{n-1} = a_n + \frac{1}{x_n}$, $x_n = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$, bo, jakoby, oczywiście, będzie

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \text{i t. d.}$$

Ponieważ mamy $x = \frac{1}{\sqrt{A} - a}, x_1 = \frac{1}{x - a_1}, x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2}, x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3}, \text{i t. d.}$
 $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_n}$, tudzież, ponieważ $x = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = \frac{\sqrt{A} + 2}{P}$, stąd $2 = a$ a $P = \frac{A - a^2}{1}$, więc, potorywszy równość x w $x_1 = \frac{1}{x - a_1}$, zachodzi, będzie

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{A+2_1} - a_1} = \frac{P_1}{\sqrt{A} - (a_1 P_1 - 2_1)} = \frac{P_1 \{ \sqrt{A} + (a_1 P_1 - 2_1) \}}{A - (a_1 P_1 - 2_1)^2} = \frac{\sqrt{A} + 2_1}{P_1}$$

potoczemy $a_1 P_1 - 2_1 = 2_2$ a zw. $\frac{A - 2_2^2}{P_1} = P_2$. Tę wartość podstawiamy w miejsce a_1

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \text{ , supitnie otrzymamy } x_2 = \frac{\sqrt{A} + 2_2}{P_2}$$

$a_2 P_2 - 2_2 = 2_3$ a $\frac{A - 2_3^2}{P_2} = P_3$. Tym samym sposobem postępujemy coraz dalej.

$$\text{znajdziemy } x_3 = \frac{\sqrt{A} + 2_3}{P_3} \text{ , skoro potoczemy } a_3 P_3 - 2_3 = 2_4 \text{ a } \frac{A - 2_4^2}{P_3} = P_4$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{A} + 2_4}{P_4} \dots a_4 P_4 - 2_4 = 2_5 \dots \frac{A - 2_5^2}{P_4} = P_5$$

$$x_5 = \frac{\sqrt{A} + 2_5}{P_5} \dots a_5 P_5 - 2_5 = 2_6 \dots \frac{A - 2_6^2}{P_5} = P_6$$

$$x_n = \frac{\sqrt{A} + 2_n}{P_n} \dots a_n P_n - 2_n = 2_{n+1} \dots \frac{A - 2_{n+1}^2}{P_n} = P_{n+1}$$

Mówimy teraz że dla

$2_0 = 0$	i	$P_1 = 1$	$\frac{A - 2_1^2}{P_1} = P_2$	a_1	$\frac{\sqrt{A} + 2_1}{P_1}$
$2_1 = a_1 P_1 - 2_0$	i	$P_2 = \frac{A - 2_1^2}{P_1}$	$\frac{A - 2_2^2}{P_2} = P_3$	a_2	$\frac{\sqrt{A} + 2_2}{P_2}$
$2_2 = a_2 P_2 - 2_1$	i	$P_3 = \frac{A - 2_2^2}{P_2}$	$\frac{A - 2_3^2}{P_3} = P_4$	a_3	$\frac{\sqrt{A} + 2_3}{P_3}$
$2_3 = a_3 P_3 - 2_2$	i	$P_4 = \frac{A - 2_3^2}{P_3}$	$\frac{A - 2_4^2}{P_4} = P_5$	a_4	$\frac{\sqrt{A} + 2_4}{P_4}$
$2_n = a_n P_n - 2_{n-1}$	i	$P_{n+1} = \frac{A - 2_n^2}{P_n}$	a_{n+1}	$\frac{\sqrt{A} + 2_{n+1}}{P_{n+1}}$	

Jak np. w pierwszym \sqrt{A} , mamy $a=7, a_1=1, a_2=4, a_3=3, a_4=1, a_5=2, a_6=2, a_7=1, a_8=3, a_9=4, a_{10}=1, a_{11}=14, i.t.d.$

§19. Mówiąc teraz bierz $\sqrt{A} = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{x_n}$

Ponieważ możemy zwać i atomu ciągły, z czego otrzymujemy wartości przybliżone i to coraz bliżej prawdziwej \sqrt{A} , oznaczmy więc przez $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ trzy po sobie następne wartości przybliżone, odpowiadające iteracjom a_{n-1}, x_n i a_n .
Będziemy więc mieć $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \sqrt{A}$ bierzemy $\sqrt{A} = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}$

Albowiem widzimy, że w powyższych wartości $a, a_1, a_2, a_3, \dots, x_n$ są pod jedną i tą samą kreską, mianowicie \sqrt{A} , potoczemy więc przez x_n pod tej kreską, mianowicie potoczemy $x_n = \frac{\sqrt{A} + 2_{n+1}}{P_{n+1}}$ bo x_n odpowiada a_n , i otrzymamy wartości

$$\text{wyżej, otrzymamy } \sqrt{A} = \frac{P_n (\frac{\sqrt{A} + 2_{n+1}}{P_{n+1}}) + P_{n-1}}{Q_n (\frac{\sqrt{A} + 2_{n+1}}{P_{n+1}}) + Q_{n-1}} = \frac{P_n (\sqrt{A} + 2_{n+1}) + P_{n-1} P_{n+1}}{Q_n (\sqrt{A} + 2_{n+1}) + Q_{n-1} P_{n+1}}$$

Trzeba teraz mianownik i pod mianownik wyprawy wymierne osobno a nie, wymierne osobno, otrzymamy dwa następne równania

$$P_n 2_{n+1} + P_{n-1} P_{n+1} - Q_n A = 0$$

$$Q_n 2_{n+1} + Q_{n-1} P_{n+1} - P_n = 0$$

z których należy najpierw P_{n+1} a potem 2_{n+1} rozwiązać

$$(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) 2_{n+1} = Q_n Q_{n-1} A - P_n P_{n-1}$$

$$(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) P_{n+1} = P_n^2 - A Q_n^2$$

Albowiem że $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \pm 1$, mianowicie jeżeli jest nieparzyste, jest $+1$ a gdy parzyste, -1 , mianowicie bierzemy

$$\mp 2_{n+1} = \frac{A Q_n Q_{n-1}}{P_n P_{n-1}} - P_n P_{n-1}$$

$$\mp P_{n+1} = \frac{P_n^2 - A Q_n^2}{P_n P_{n-1}}$$

Z tych dwóch równań otrzymamy naocznie wyżej dostrzeżone, prawdziwe P_{n+1} i 2_{n+1} są całkowitkami całkowitymi

Ponieważ ten wiadomo że $\frac{P_n}{Q_n} < VA$ czyli $\frac{P_n^2}{Q_n^2} < A$ albo $P_n^2 < A Q_n^2$ więc $P_n^2 - A Q_n^2$ jest dodatnie lub co najmniej większe zero, jeżeli n jest parzyste, lub ujemne, jeżeli n jest nieparzyste, z czego wynika że P_{n+1} czyli $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ są zawsze dodatnie. Aże i poprzednich wartości otrzymujemy $P_n P_{n+1} = A - 2n$, przeto ponieważ iloczyn $P_n P_{n+1}$ jest dodatni, więc koniecznie musi $2n < A$ czyli $2n < VA$, licząc przeto $2_1, 2_2, 2_3, 2_4, \dots$ nigdy nie przekroczy wartości VA , a następne poprzednie otrzymane ułamki $\frac{VA+2_1}{P_1}, \frac{VA+2_2}{P_2}, \frac{VA+2_3}{P_3}$ i t.d. ufrakcje są dodatnie.

Te ufrakcje licząc przez 2 oznaczone są także dodatnimi, a następnie możemy dowieść. Przyjmijmy że pewna z tych liczb 2_n jest dodatnia, tedy, ponieważ a_n jest największą całkowitą zawartą w $\frac{VA+2_n}{P_n}$, będzie naturalnie $2a_n > \frac{VA+2_n}{P_n}$ czyli $2a_n P_n > VA + 2_n$. Lecz co dopiero widzimy że $2n < VA$, więc tenże wyraz $2a_n P_n > 2n$ czyli $a_n P_n > n$, t.j. $a_n P_n - n > 0$ czyli dodatnie. Ale według poprzednich mych powiadam $a_n P_n - n = 2_{n+1}$ więc 2_{n+1} jest liczbą dodatnią. Aże $2_1 = a$ jest liczbą dodatnią, zatem $2_{n+1} = 2_2, 2_{n+1} = 2_3, 2_{n+1} = 2_4$ i t.d. są liczbami dodatnimi.

§ 20. Między $2_n < VA$ a największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą VA jest a , zatem liczbą oznaczoną przez różnicę 2 między liczbą a przekraczającą nie mogą być, jest więc liczbą a granicą ufrakcji liczb 2_n oznaczonych t.j. $2_n + 2_{n+1} = a_n P_n$, a wartości 2_n na początku otrzymanych widzimy że $2_n + 2_{n+1} = a_n P_n$, zatem zatem z liczb a_n, P_n nie może być większą niż $2_n + 2_{n+1}$ czyli największą mi. $2a$, jest przeto $2a$ granicą, tak liczb a_1, a_2, a_3, \dots jako też liczb P_1, P_2, P_3, \dots a dlatego tak liczbą przez różnicę a oznaczoną, jako też liczbą oznaczoną przez P mają ograniczoną a zatem skończoną liczbę wartości, oraz liczbą różnicę ich potęg, a więc, musi także być ograniczoną. Aże ułamek $\frac{VA+2_n}{P_n}$ ciągły równający się niewymiernemu iloczynowi VA idzie bez końca, zatem potęgami liczb P_n t.j. jeden z ułamków $\frac{VA+2_1}{P_1}, \frac{VA+2_2}{P_2}, \frac{VA+2_3}{P_3}$ i t.d. musi znów kiedyś powrócić, a następnie i pewna liczba mianowników $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ powróci znów musi i to w tym samym porządku i przedstawia się niewymierną liczbą VA jako ułamek przerywany.

Przez oznaczenie poprzednich było poprzednio, przypuszczamy że a_{n+1} jest pierwszym mianownikiem czyli $a_{n+1} = a_{n+1}$, a następnie, że $2_{n+1} = 2_{n+1}$ i $P_{n+1} = P_{n+1}$. Ponieważ z poprzednich ułameków (18.)

$$2_{n+1} = a_n P_n - 2_n \quad P_n P_{n+1} = A - 2_{n+1}$$

$$\text{więc też} \quad 2_{n+1} = a_{n+1} P_{n+1} - 2_{n+1} \quad \text{i} \quad P_{n+1} P_{n+1} = A - 2_{n+1}$$

Ale według poprzedniego że mianowniki a_{n+1} nie powróci, i że zatem $a_{n+1} = a_{n+1}$, więc też musi $P_{n+1} = P_{n+1}$ a $2_{n+1} = 2_{n+1}$, dlatego przeto będzie także

$$P_{n+1} P_{n+1} = A - 2_{n+1}$$

a następnie $P_n = P_{n+1}$. Podobnie, ponieważ $2_{n+1} = a_n P_n - 2_n$ oraz $2_{n+1} = a_{n+1} P_{n+1} - 2_{n+1}$ odjęwszy przeto te dwa równania od siebie, wypadnie $0 = (a_n - a_{n+1}) P_n - 2_n + 2_{n+1}$, stąd

$$\frac{2_n - 2_{n+1}}{P_n} = a_n - a_{n+1}, \text{ albo } \frac{2_n - 2_{n+1}}{P_{n+1}} = a_n - a_{n+1}, \text{ bo } P_n = P_{n+1}. \text{ Lecz według poprzedniego}$$

z poprzedniego $q_n 2_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} - q_n^2 = 0$ jest też $q_{n-1} 2_n + q_{n-2} P_n = q_{n-1}^2$ czyli

$$2_n = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} P_n. \text{ Aże } \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ jest wartością przybliżoną pierwszemu } VA, \text{ zaś } VA \text{ największą całkowitą jest } a, \text{ przeto też i ostatni możemy } \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}} = a + r, \text{ gdzie } r \text{ jest}$$

liczba r potęgą wyrażającą $\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}}$, gdzie $2_n = a + \frac{r - q_{n-2}}{q_{n-1}}$ czyli $a - 2_n = \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$. Lecz z natury przybliżonych wartości jest $q_{n-2} < q_{n-1}$, więc też $a - 2_n < P_n$, jeden z tych najwspólniejszych przypadków że $n=0$, bo między wartościami przez q oznaczonymi, nie ma najmniejszej q_2 , a z poprzedniego także wiemy że $a - 2 = a$, zaś $P = 1$ i dlatego nie jest ogólnie $a - 2_n < P_n$. Lecz dla $n=1$, jest $a - 2_1 = 0$, przeto będzie $a - 2_1 < P_1$.

[illegible]

Wniosek dla wyrazu n -tego przypadek jest $2i + 2i+1 = a_i P_i$. Położymy
do sprawdzenia $2n+1 = a_n P_n - 2n$, zaś $a_i = 2a$, twierdzi, $2i, 2i+1$ i P_i są liczbami
całkowitymi i oprócz tego dwiciesięć razy nie może być większe od a ,
więc naturalny sposób wypróbowania jest $2i = 2i+1 = a$, zaś $P_i = 1$. W pro-
wadzie $\mp P_{n+1} = p_n^2 - Aq_n^2$ przy $n = i-1$, będzie $\mp P_i = p_{i-1}^2 - Aq_{i-1}^2$, to jest
 $p_{i-1}^2 - Aq_{i-1}^2 = \pm 1$ według tego jak $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \gtrless \sqrt{A}$.

§ 22. Takie są sposoby i dowody wpy wpyślo co nam co dal przy
cizgu potrzebni przyt, wemy lewa do rownizania, listach, cztowor, przy
rownanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1$$

W płóciem liczb A nie może być ani odjemną ani dodatniym kwadratem.
 Gdyby bowiem była odjemną, miałobyśmy $x^2 + Ay^2 = \pm 1$. Dla równanie
 $x^2 + Ay^2 = +1$ rozwiązuje tylko, wprawdzie $x=1, y=0$, równanie zaś
 $x^2 + Ay^2 = -1$ jest całkiem niepodobnem; przeto ponieważ zero do liczb
 całkowitych nie możemy, a jedynie rozwiązanie dla $x=1, y=0$ jest tak dobrane
 jak iadaniem, bo nam, rekrugni się chodzi o rozwiązanie ogólne, uważa więc
 to względem A jest prawiadliwem iż odjemną liczbę być nie może. Że nie
 może być dodatniym kwadratem, łatwo się także przekonai; przypuści-
 my bowiem że $A=a^2$, z którego równania otrzymamy dwa następne
 zje $(x+ay)(x-ay) = +1$ i $(x+ay)(x-ay) = -1$.

Nierówności nierzynimy radoszy' bierze $x+ay=+1$ i $x-ay=+1$, a skądżo
z tych ostatnich otrzymamy jedynę tylko rozwiązanie $x=1, y=0$.
Wtedy drugiego z poprzednich równań' mieliśmy $x+ay=-1$ i $x-ay=-1$
albo też $x+ay=+1$ i $x-ay=-1$; w pierwszym razie znajdziemy $x=0, y=-\frac{1}{a}$
w drugim zaś $x=0$ i $y=\frac{1}{a}$ jako także jedynę rozwiązanie, Zostać
zatem i drugie stwierdzenie, że jeżeli A nie może być uważanem jedyne
równanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ ma być rozwiązaniem w liczbach całkowitych

§23. Takie równieży, zastrzeżenia albo raczej warunki względem funkcji A ,
przystępmy już naresztę do rozmieszczenia powyższego równania
i to naprowadzając na $X^2 - A y^2 = +1$. W tym celu rozwiążmy $V A$ na sil-
niek większy, a oznaczmy przez t_n^2 pewną przybliżoną jego wartość odpowie-
dającą iteracyom optymalizacyonowym A_{i-1} , przypuścimy że funkcya wyraża-
jąca je, z zadaną i i jest parzystą, będąc, według tego co się wyżej powiedziało,
już nawet $p^2 - A q^2 = +1$ i wstępując następnie, warunek przybliżony odpow-
iedzący danemu iteracyonowi A_{i-1} , rozwiążmy to ostatnie równanie i w funkcjach
elementarych. Jeżeli i oznaczą funkcje wyraża-
jące je, i jest nieparzystą

$$a_{1i-1}, a_{2i-1}, a_{3i-1}, a_{4i-1}, a_{5i-1}, a_{6i-1}, \text{ i'nd.}$$

[illegible]

Wzrostu i siły ten sposób rozwiązania nie posiada Della Kłody przypada nie 25.
 Takim samym a nawet krótszym. Co się zaś tyczy jego wygłowności i precyzji
 nie można tamten wystrzemić z nim żadnego porównania

Przechujmy się więc jeden przykład w całej obforności, szukając najmniejszego
 liczb całkowitych rozwiązyjących równanie $x^2 - 61y^2 = +1$.

Spokojnie skorzystamy z regły siłowności atomu ciągłego, a jeżeli nie warzy przypominamy
 według wzorów $2n+1 = a_n b_n - 2n$ i $P_{n+1} = \frac{A - 2n+1}{P_n}$, bo jest najtańszy i najkrótszy,

gdzie: $\sqrt{61} = \frac{\sqrt{61+0}}{1} = 7 + \frac{1}{1+1}$ więc $\sqrt{61} = 7 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+1}}$
 $\frac{\sqrt{61+7}}{12} = 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+1}}}}}$
 $\frac{\sqrt{61+5}}{3} = 4 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+1}}}$
 $\frac{\sqrt{61+7}}{4} = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{14}}}}}$
 $\frac{\sqrt{61+5}}{9} = 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{14}}}$
 $\frac{\sqrt{61+4}}{5} = 2 + \frac{1}{14}$ i t.d.

Widzimy ten atom i przekształćmy go na
 dwóch perypodach, ponieważ linia składowa
 jest nieparzysta, więc tak równanie
 $x^2 - 61y^2 = -1$, jako że $x^2 - 61y^2 = +1$ będzie mo-
 gło być rozwiązaniem. Przybliżone wartości
 znajdziemy jak następuje:

$\frac{7}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{1}{137}$	$\frac{3}{195}$	$\frac{4}{722}$	$\frac{1}{3083}$	$\frac{14}{3805}$	$\frac{1}{56353}$
$\frac{469849}{60158}$	$\frac{2319527}{296985}$	$\frac{7428430}{951113}$	$\frac{97117957}{1248098}$	$\frac{26924344}{3447309}$	$\frac{63596645}{8142716}$	$\frac{90520989}{11590025}$	$\frac{333169612}{42912791}$	$\frac{1431159437}{183241189}$	$\frac{1766319049}{226153980}$	i t.d.		

Oto przybliżone wartości $\frac{29718}{3805}$ pierwszego perypodu, rozwiązyjące równanie
 $x^2 - 61y^2 = -1$, jest też oczywiście $29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1$. Druga wartość

$\frac{1766319049}{226153980}$ w drugim perypodzie, rozwiązyjące równanie $x^2 - 61y^2 = +1$. Jeżeli

$1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = +1$, i linie $x = 1766319049$ i

$y = 226153980$ są najmniejszą prem. rozwiązyjącymi to ostatnie równanie.

Następnych perypodów przybliżone wartości rozwiązyją naprzemiennie pier-
 wopie i drugie równanie, mianowicie nieparzystych pierwszych, parzystych zaś
 perypodów drugie równanie.

Dla linie $A = 43$, znajdziemy składowe 6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12 a wartości przybli-
 $\frac{1}{0}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{7}{1}$ $\frac{13}{2}$ $\frac{46}{7}$ $\frac{59}{32}$ $\frac{341}{61}$ $\frac{400}{235}$ $\frac{1541}{296}$ $\frac{1941}{531}$ $\frac{3482}{531}$ i t.d. przed $x = 31182$, $y = 531$ i dla 14
 linie 43 nie ma rozwiązania równania $x^2 - 43y^2 = -1$ bo linie przybliżonych wartości
 się perypodu jest parzystą i dlatego w każdym perypodzie wartości przybliżone
 stoją pod składowym 12, będzie nam więcej parzystym.

Dla $A = 28$, znajdziemy $x = 127$, $y = 24$ a $x^2 - 28y^2 = 1$
 $A = 29$ --- $x = 70$, $y = 13$ a $x^2 - 29y^2 = -1$ zaś $x = 9801$, $y = 1820$ dla
 $A = 44$ --- $x = 199$, $y = 30$ --- $x^2 - 44y^2 = 1$
 $A = 45$ --- $x = 161$, $y = 24$ --- $x^2 - 45y^2 = 1$
 $A = 67$ --- $x = 48842$, $y = 5967$ --- $x^2 - 67y^2 = 1$
 $A = 53$ --- $x = 182$, $y = 25$ --- $x^2 - 53y^2 = -1$ --- $x = 66249$, $y = 9100$ dla

25. / Kształt trygonometryczny wyrażenia jedno rozwiązanie równania $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, łatwo znaleźć można w innych. Jaki, jeżeli kilka przybliżonych wartości przyjąć jest pragnąć, wtedy, jak wiemy, by było rozwiązanie $x^2 - Ay^2 = +1$ może być rozwiązaniem w liczbach całkowitych. Niektóre pierwsze, pierwsze rozwiązanie, również jest wartością będzie $\frac{p}{q}$, jest prosto $p^2 - Aq^2 = 1$; niech będzie imię, którym kolwiek rozwiązaniem będzie przybliżone wartości $\frac{p}{q}$, dla tego będzie także $P^2 - AQ^2 = 1$ zatem

$$(p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = p^2 P^2 + Aq^2 Q^2 - Ap^2 Q^2 - Aq^2 P^2 = 1$$

W pierwszym słowniu mnożenia dodawamy i odjęmy $2ApPqQ$, znajdziemy

$$(pP + AqQ)^2 - A(pQ + qP)^2 = 1$$

a to rozwiązanie jest postaci $x^2 - Ay^2 = 1$, jeżeli postawimy $x = pP + AqQ$, $y = pQ + qP$.

Oznaczamy przez wartości przybliżone następujących po sobie przybliżeniach rozwiązań, dla rozwiązania gmo $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''}$ i t.d. Stosownie do poprzednich wartości x i y , postawić można

$$\begin{aligned} p &= p & q &= q \\ p' &= p^2 + Aq^2 & q' &= 2pq \\ p'' &= pp' + Aqq' & q'' &= pq' + p'q \\ p''' &= pp'' + Aqq'' & q''' &= pq'' + p''q \\ p'''' &= pp''' + Aqq''' & q'''' &= pq''' + p'''q \end{aligned}$$

i t.d.

Aby zaś z powyższego najprostszego rozwiązania mieć ogólne wyrażenia w trygonometrycznych innych rozwiązaniach, uważamy że $x^2 - Ay^2 = (x + y\sqrt{A})(x - y\sqrt{A}) = 1$, więc postawimy $x = pP + AqQ$, $y = pQ + qP$, postawimy w tym wyrażeniu wartości p i q i znajdziemy $x \pm y\sqrt{A} = pP \pm qP\sqrt{A} \pm pQ\sqrt{A} + AqQ = (p \pm q\sqrt{A})(P \pm 2Q\sqrt{A})$, a dla tego postawić można

$$\begin{aligned} p \pm q\sqrt{A} &= p \pm q\sqrt{A} \\ p' \pm q'\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^2 \\ p'' \pm q''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^3 \\ p''' \pm q'''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^4 \end{aligned}$$

i t.d.

w ogólności $x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^m$ bo x i y są wymiernymi

$$x - y\sqrt{A} = (p - q\sqrt{A})^m$$

$$x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)^m = 1^m = 1$$

co dowodzi, że jeżeli liczbę będzie wykładnik m , będzie byłoby całkowity i dodatni. Any, wartości na x i y również są rozwiązaniem $x^2 - Ay^2 = 1$.

Jeżeli chcemy mieć wartości na x i y każdą osobno, tedy z dwóch powyższych przypadków

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^m + (p - q\sqrt{A})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^m - (p - q\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}$$

Podstawiając potęgę m trygonometryczną, znajdziemy

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Ap^{m-2} q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^2 p^{m-4} q^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} A^3 p^{m-6} q^6 + \dots$$

$$y = mp^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Ap^{m-3} q^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A^2 p^{m-5} q^5 + \dots$$

bo w x nie ma już wyrazów niewymiernych, zaś w y obowiązuje być, więc wspólny czynnik \sqrt{A} , gmo który się podzieli. Te wartości są całkowite, widzimy to na pierwszym rzucie gdyż liczbę m, A, p, q są całkowite.

W przypadku że $p^2 - Aq^2 = -1$, można rozwiązać jak widzieliśmy także rozwiązanie $x^2 - Ay^2 = -1$ jeżeli dla $x^2 - Ay^2 = +1$. Ogólne wartości na x i y będą

$$\begin{aligned} x &= \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k} + (p - q\sqrt{A})^{2k}}{2} & \text{ktąd } m &= 2k \\ y &= \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k} - (p - q\sqrt{A})^{2k}}{2\sqrt{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dla pierwszego} \quad x &= \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k+1} + (p - q\sqrt{A})^{2k+1}}{2} & \text{ktąd } m &= 2k+1 \\ y &= \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k+1} - (p - q\sqrt{A})^{2k+1}}{2\sqrt{A}} \end{aligned}$$

t.j. w tym przypadku parzyste potęgi dwumianów $p+q\sqrt{A}$ i $p-q\sqrt{A}$ rozwiązuje równanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, a nieparzyste, $x^2 - Ay^2 = -1$, bo jeżeli

$$x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^{2k} \quad \text{zostanie} \quad x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^{2k+1}$$

$$x - y\sqrt{A} = (p - q\sqrt{A})^{2k} \quad \text{zostanie} \quad x - y\sqrt{A} = (p - q\sqrt{A})^{2k+1}$$

tedy $x^2 - Ay^2 = (-1)^{2k} = 1$ będzie $x^2 - Ay^2 = (-1)^{2k+1} = -1$

Tak np. dla równania $x^2 - 29y^2 = \pm 1$ znalazłszy $x=p=70$ a $y=q=13$ tak że $p^2 - Aq^2 = 70^2 - 29 \cdot 13^2 = -1$, więc wypisaliśmy wartości otrzymane

$$x = \frac{(70 + 13\sqrt{29})^{2k} + (70 - 13\sqrt{29})^{2k}}{2} \quad i \quad y = \frac{(70 + 13\sqrt{29})^{2k} - (70 - 13\sqrt{29})^{2k}}{2}$$

rozwiązując równanie $x^2 - 29y^2 = 1$, wartości zaś otrzymane

$$x = \frac{(70 + 13\sqrt{29})^{2k+1} + (70 - 13\sqrt{29})^{2k+1}}{2} \quad i \quad y = \frac{(70 + 13\sqrt{29})^{2k+1} - (70 - 13\sqrt{29})^{2k+1}}{2}$$

rozwiązując równanie $x^2 - 29y^2 = -1$.

Najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2 - 29y^2 = 1$ są jak widziliśmy $x=9801$, $y=1820$ i rzeczywiście $9801^2 - 29 \cdot 1820^2 = 1$.

Najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ są nie tylko bardzo małe, ale nawet bardzo wielkie. Tak np. chęć rozwiązać równanie $x^2 - 211y^2 = 1$, tedy rozwiązując $\sqrt{211}$ na sto miejsc cyfr, znajdziemy pierwszy podmiar w milionach, który x 26 cyframi ma postać

14) 1, 1, 9, 5, 1, 2, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 13, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 5, 9, 1, 1, 28, wartości zaś przybliżone 26 $\frac{278354373650}{19162703353}$, jeżeli najmniejszą liczbę rozwiązującą równanie rozwiążemy postaciami są: $x=278354373650$ a $y=19162703353$.

(Dla równania $x^2 - 9901y^2 = 1$, znalazłszy)

$$x = 379516400906811930638014896080$$

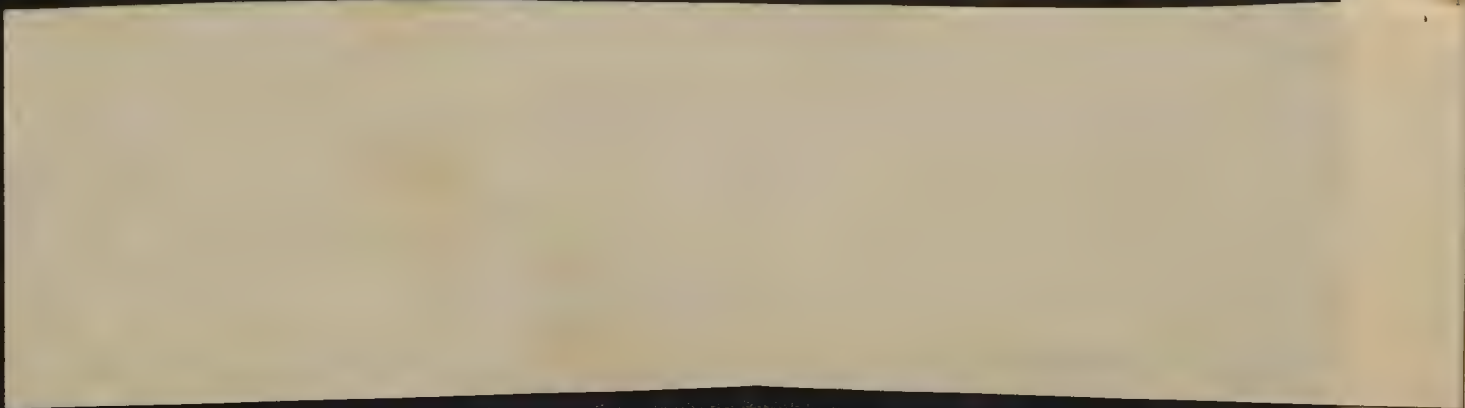
$$y = 12055735790331359447442528767 \quad 3$$

(Ważną rzeczą jest mieć pewny i niemyślny sposób wyznaczenia tych najmniejszych liczb, bo próba jest trudniejsza niż ta, którą niechcący się poniekąd udało się podać. Równanie nie może być rozwiązane w liczbach całkowitych. Reprezentacja wytorów prawdy, podobna jest do nas, że sposobem tym pewnym, że istnieją cyfry przy pomocy których, przychodzą do odkrycia liczb rozwiązujących równanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$.

Wspomnieliśmy, że pierwszy Fermat matematyk francuski podał metodę, którą anglikański do rozwiązania równania $x^2 - Ay^2 = 1$ w liczbach całkowitych; a także je Brankes rozwiązał rzeczywiście, precyzyjnie i pewnie, ani drugi nie podał ogólnego natychmiast sposobu, ani też dowiedzieli się o równaniu, że może być rozwiązane w liczbach całkowitych. Pierwszy dopiero Lagrange podał taki dowód w „Mélanges de Turin”, tom IV, a potem w „Mémoires de Berlin 1767”. Jemu, dla prawdziwego i obecnego postępu w analizie matematycznej; nie dość, że wiemy, że było rany, wspomnieliśmy o równaniu, jako że jest ciekawym i do myślenia problemem, jest jeszcze koniecznym w rozwiązaniu, w szczególności, podać prawdziwych. Do rozwiązania stopnia drugiego z dwiema nieznanymi w liczbach całkowitych. Widziliśmy, że wiemy, że najpierw rozwiązanie, przy jego pomocy znaleźć możemy niechcący liczb innych. Dlatego do nich, który w tym przedmiocie pracujący matematyk, jak Degen Dürer i Léonard Francus, wypracowali nawet tablice, które najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$. Pierwszy wydał je w „Canon Pellianus, sive tabula simplicissima aequationis celeberrimae $x^2 - Ay^2 = 1$ solutionem pro p[ro] singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 numeris rationalibus iisdemque integris exhibens. Autore C.F. Degen Hafniae 1811”. Drugi w pracownym swoim dziele „Théorie des Nombres”, wydał nie tylko tablice x nam, także, najmniejszego rozwiązania równania powyższego od $A=2$, aż do $A=1003$, wypisał też, frakcyjnie liczb niechcący, dobitnie nam przedstawił.

~~31, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31~~
~~31, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31~~

V991 remission...
 ... 31 jiff...



uosi'us

for
i v
O
do
.
S
M
co,
ru
pu

czyli $P(q+q') - 2qVA < \pm \frac{\delta}{q}$, albo $P(q+q') - 2qVA - q'VA + q'VA < \pm \frac{\delta}{q}$, albo
 $P(q+q') - (q+q')VA - (q-q')VA < \pm \frac{\delta}{q}$, albo, $(P-VA)(q+q') - (q-q')VA < \pm \frac{\delta}{q}$, lub na-
 sprzecznie $(VA-P)(q+q') + (q-q')VA \pm \frac{\delta}{q} > 0$. Nierówność ta jest oczywiście
 bo $VA > P$, $q > q'$ a wyraz $(q-q')VA$ równający się jemu najmniej ilości VA ,
 już sam jeden przewyższa ilość $\frac{\delta}{q}$. Która jest mniejszą od 1. Attoż nie pro-
 sto q znajdować się konieczne będzie między przytł. i nemi waro-
 ściami do VA . Dąży więc będzie VA rozwinąć na atomiki ciężty i obra-
 chować jego wartości przybliżone aby otrzymać wypustki rozważanie
 równania $x^2 - Ay^2 = \pm P$ w liczbach całkowitych, pamiętając tylko że
 być powinno $P < VA$.

Przejdźmy VA na atomiki ciężty, szukamy ich wiadomo z poprzednich ilora-
 rów pod postacią ich ułamków $\frac{VA+2}{P}$ których otrzymujemy między
 sobą atomiki ciężty; jeżeli więc który z tych ilorazów ma mianownik
 np $P_{n+1} = P$, wtedy otrzymamy z przybliżonej wartości $x^2 - Ay^2 = \pm P$. Bo jeżeli
 odpowiadać, jedno rozważanie równania $x^2 - Ay^2 = \pm P$. Bo jeżeli
 przybliżone wartości $\frac{P}{q}$ odpowiadać mianownikowi $P_{n+1} = P$ będzie proste
 na pierwszy, rachując zawsze za pierwiastki $\frac{P}{q}$ będzie zawsze $\frac{P}{q} > VA$
 i rozwinie równanie $x^2 - Ay^2 = +P$, porzuciwszy nie pierwszy, roz-
 wanie $x^2 - Ay^2 = -P$, gdyż w tym razie będzie $\frac{P}{q} < VA$.

Dąży się morem pierka P najdalej się kładzie w tym samym
 pierzyjocie, a w każdym razie, z powodu symetryczności pierzyjoci, zna-
 dzie się przy najmniej dwa razy, wyjąwszy gdyby P było ilorazem proste-
 wym; w takim razie, otrzymamy tylko rozważanie równania pierzyjoci
 lub drugiego, co też i w innych pierzyjociach nastąpi.

§28. Ponieważ $P_{n+1} = p^2 - Aq^2$, więc dla rozważania równania $x^2 - Ay^2 = \pm P$, do-
 stygnąć porachować P_1, P_2, P_3, \dots w całym pierzyjocie, a jeżeli między temi mia-
 nownikami znajdzie się P lub któryś z nich, wtedy pewnym jest żeśmy nie pro-
 nie lub zatorne równanie będzie mogło być rozważaniem w liczbach całko-
 witych, a mianowicie, wartości przybliżone $\frac{P}{q}$ odpowiadać mianownikowi
 $P_{n+1} = P$ będzie jednym rozważaniem równania $x^2 - Ay^2 = +P$, jeżeli $\frac{P}{q} > VA$, po-
 stępowaniem $x^2 - Ay^2 = -P$, jeżeli $\frac{P}{q} < VA$. W przeciwnym razie rozważanie jest
 nie podobne.

Jeżeli w pierzyjocie pierzyjocie znajdzie się mianownik P kilka razy, a następne
 dąży być rozważaniem nowego równania, można z tych pierzyjoci inne ich
 postawić, otrzymać nichon'rona liczb innych rozważań. Niekiedy $\frac{P}{q}$ będzie
 wartości $\frac{P}{q}$ będzie wartości rozważań równanie $p^2 - Aq^2 = P$, niech też t i u
 będą liczbami całkowitymi, rozważamy równanie
 $t^2 - Au^2 = 1$, gdyż mnożenie otrzymamy $(p^2 - Aq^2)(t^2 - Au^2) = P$, a dodamy i odję-
 ci pierzyjoci strony $2Apqtu$, znajdziemy

$$(pt \pm Aqu)^2 - A(pu \pm qt)^2 = P$$

Ktore równanie jest postaci $x^2 - Ay^2 = P$ t.j. jest równaniem danym jeżeli

$$x = pt \pm Aqu, \quad y = pu \pm qt (*)$$

i te wartości x i y rozwiążą równanie dane.

Co do nichon'ronych t i u , już wprz. widzieliśmy, że jeżeli m i n są

najmniejszymi, równanie $m^2 - An^2 = 1$ rozwiążemy. Liczbami, tedy, oznaczmy

$$(m+nVA)^k = t+uVA$$

(*) Zapisać bez
 zwrócenia
 uwagi na to, że
 w dalszym ciągu
 mówimy o tych
 samych wartościach
 w §§ 15 i 16
 otrzymujemy

Gdybyśmy mieli
 równanie
 $x^2 - 71y^2 = 8$
 gdybyśmy chcieli
 8 $\sqrt{71}$ oraz
 $2 \cdot 8 = 2$ oraz
 8
 Gdybyśmy mieli
 ilorazami i
 4 oraz 10
 odpowiedzący
 wartości przybli-
 żone 8, na pier-
 wotnym, 17 na dru-
 gim, 314 na
 trzecim a 1483
 na czwartym, więc
 się, w pełni
 równa a tych 100,
 1000 i 10000
 więc się poprawi,
 przy obliczaniu
 bo pomiędzy nimi
 różnica mała P_n
 nie różni się

a zatem nieparzyste przybliżone wartości $\frac{1483}{176}$ rozwiąże równanie
 $x^2 - 71y^2 = -7$; jest to rozwiązanie 1483² - 71.176² = -7. Skądże to pochodzi?
 Chyba o tym pomyśleliśmy, szukamy odpowiednich ilorazów czyli wyrazów $\frac{VA+2n}{P_n}$ dla
 liczb 7, a znajdziemy je jak następuje, $\sqrt{71+0} = 8+$, $\sqrt{71+8} = 2+$, $\sqrt{71+6} = 2+$,
 $\sqrt{71+4} = 1+$, $\sqrt{71+7} = 7+$, $\sqrt{71+7} = 1+$, $\sqrt{71+4} = 2+$, $\sqrt{71+6} = 2+$, $\sqrt{71+8} = 16+$.
 Oboj nasornie widzimy że tylko dwa razy jest mianownik $P_n = 7 = P$; te li
 tylko warianści które stoją pod ilorazem 2 wypadajcym z $\sqrt{71+8}$ i $\sqrt{71+6}$, roz-
 wiązując podane równanie bez reszty —, bo obie stoją na miejscach
 nieparzystych. Dwa inne ilorazy, mianowniki drugi i szósty, mają 8 i 16
 mianowników 5, i stoją na parzystych miejscach, i dlatego nie dane, ale ponieważ
 nie $x^2 - 71y^2 = +5$ rozwiązuje. Pomiędzy mianownikami P_n znajdziemy także
 dwa = 11, a także 11 $\sqrt{71}$, zupełnie przybliżone wartości, odpowiadające tym
 mianownikom czyli ilorazom 1, rozwiąże równanie $x^2 - 71y^2 = -11$ odpowiada
 na pierwszym miejscu, że obie stoją na nieparzystych miejscach. Rozwiązanie 42² - 71.5² = -11 jak widać
 455² - 71.54² = -11. Chyba się polecamy że są one rozwiązań równania
 $x^2 - Ay^2 = \pm P$ w liczbach całkowitych wypróbowany $P < VA$, przystąpić mo-
 żemy znowu rozwiązać tego rodzaju warunki $P < 2a$.
 Ta druga próba dała nam równanie $x^2 - 61y^2 = \pm 5$. Wypróbowaliśmy już
 rozwiązanie $\sqrt{61}$ na setkach ciągłych. Gdybyśmy tego nie mieli, poprosilibyśmy
 w tabeli najmniejszych wartości m i n odpowiadających liczb 61, które
 jest pierwszy, znalazlibyśmy $m = 1766319049$, $n = 226153980$ i posłismy
 nam 2² rozwiązań na ciągły i znaleźli ilorazy jak wyżej
 ilorazy - - - - 7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1
 wartości przybliżone $\frac{1}{0}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{39}{5}$, $\frac{125}{16}$, $\frac{164}{21}$, $\frac{453}{58}$, $\frac{1070}{137}$, $\frac{1523}{195}$, $\frac{5639}{722}$, $\frac{24079}{3083}$.
 Ponieważ tu $\frac{29}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2+$, prosto szukamy między ilorazami liczb 2 i 29
 dużej liczby dwa razy, prosto chociaż nie musimy odpowiedzieć jeśli iloraz
 odpowiada mianownikowi $P_n = 5$, wpadło jest bardzo mało podobnie
 164 i 453 stojące pod tem ilorazami rozwiązuje, zatem
 równanie. A jeżeli to nastąpi, drugi pierwiastek jako stojący na miejscu
 parzystym, bo podtem, rozwiąże równanie $x^2 - 61y^2 = -5$, druga zaś, jako stojąca
 na miejscu parzystym a zatem parzystym, rozwiąże równanie $x^2 - 61y^2 = +5$.
 Rozwiązanie 164² - 61.21² = -5 a 453² - 61.58² = +5. Mając pod oczyma wy-
 zenia $\frac{VA+2n}{P_n}$, znajdziemy już między mianownikami P_n liczb 9 i 12 których
 żadna jest większą niż $\sqrt{61}$, wpadło ponieważ i żadna jest mniejszą niż
 2a, bo jak wiemy P_n nigdy nie może przekroczyć granicy 2a, zatem i wartości
 się przybliżone stojące pod ilorazami 1 i 1 mającemi do tych mianowników
 mianowniki wartości $\frac{125}{16}$ i $\frac{1070}{137}$ rozwiązuje, równanie $x^2 - 61y^2 = \pm 9$ i to pier-
 woprawa równanie $x^2 - 61y^2 = +9$ bo stoi na miejscu parzystym, czwartym, druga zaś
 równanie $x^2 - 61y^2 = -9$ bo stoi na miejscu nieparzystym, bo pierwszym. Jakże
 125² - 61.16² = +9 a 1070² - 61.137² = -9. Wartości 7 i $\frac{24079}{3083}$ stojące także
 pod ilorazami 1, ale odpowiadającymi mianownikom 12, rozwiązuje, równanie
 pierwsza $x^2 - 61y^2 = -12$ bo stoi na pierwszym a zatem nieparzystym miejscu
 druga zaś równanie $x^2 - 61y^2 = +12$ bo stoi na parzystym, drugim miejscu.
 Rozwiązanie 7² - 61.1² = -12 a 24079² - 61.3083² = +12.
 §30. Jeżeli teraz chcemy znaleźć inne rozwiązania równania $x^2 - 61y^2 = 5$
 gdybyśmy mieli, jak wyżej widzieliśmy $x = pt \pm Aq$, $y = pu \pm qt$ gdzie
 $p = 453$, $q = 58$, $A = 61$, zaś $t + u\sqrt{A} = t + u\sqrt{61} = (m + n\sqrt{61})^2 = (29718 + 3805\sqrt{61})^{2k}$
 gdzie m i n są najmniejszymi rozwiązaniami $m^2 - 61n^2 = -1$ rozwiązuje, które
 równanie mało $x^2 - 61y^2 = 5$, rozwiązuje, wpadłoby wartości otrzymane
 z $x = 453t \pm 3538u$, $y = 453u \pm 58t$, $t + u\sqrt{61} = (29718 + 3805\sqrt{61})^{2k}$
 Wtedy zaś powtórzymy wpadłoby liczb całkowitych i dodatnich

[illegible]

Jeżeli dwa równania, nierówności, nierówności nie jest pogłębieniem następnego, to
niego jest tylko $AX + BY + C = 0$, czyli $ax + by = n$ i nie wartości x z tego
równania otrzymamy, również potrzebna na ulomku ciągły, a kiedy $P = P$
funkcje między miarowymi kamie P_n , która jeżeli jest kilka razy powiększy, da nam
funkcje równoważną zatorowego równania.

Albo spróbuj, coarowu $x = \frac{m + \sqrt{am^2 + n^2}}{a}$, jest jeszcze druga $x = \frac{m - \sqrt{am^2 + n^2}}{a}$,
coarowu, coarowu? Albo drugi jest zastępnym ilorazowi $\frac{\sqrt{A - 2n}}{P_n}$ ma być postać
 $\frac{\sqrt{A + 2n}}{P_n}$, wtedy $2n = +2n$ a $-P_n = +P_n$ i wtedy znajdziemy przybliżone wartości
z równań, z tego równania $ax^2 + 2mxy - ny^2 = x + P$ podtemiżamemi warunkami.

§39. W tych uwagach wiemy o równaniu ogólnie równanie

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$$

to równanie w liczbach całkowitych, a warunkiem, o którym się już wspominało,
wspomniato, że współczynnik a jest liczbą dodatnią albo się go należy ująć,
to, będziecie nie współczynnik mnożący iloczyn mianowanych x, y , jest liczbą
parzystą, lub się go należy ująć. W równaniu tego równania należy,
ściślej mówiąc, na każdy przypadek, mianować.

$b^2 - ac = 0$, $b^2 - ac < 0$ czyli ujemne, $b^2 - ac =$ doładowemu kwadratowi, i należy
że $b^2 - ac > 0$ czyli dodatnie. Rozważmy każdy z tych przypadków osobno.

1^o Jeżeli $b^2 - ac = 0$, rozmówimy w tym przypadku o równaniu $ax^2 + 2bxy + cy^2 = aN$.
u otrzymamy $ax^2 + 2abxy + acy^2 = aN$. (Dodaćmy teraz i odejmijmy a pierwiastek,
wspierając tego równania by , znajdziemy
 $(ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2 = aN$

czyli $(ax + by)^2 = aN$, bo $b^2 - ac = 0$

Z ostatniego równania wynika, że jeżeli dane równanie ma być rozwiązane,
należy w liczbach całkowitych, liczba aN powinna być doładowym kwadratem.
Z tego równania wypada $ax + by = K$ jeżeli potoczny $aN = K^2$.

To ostatnie równanie jest nieoznaczonym pierwiastkiem stopnia 2 z dwiema
miernymi, które rozwiązuje każdą dowolną liczbą, znajdziemy x i y całkowi,
które a dopełniają warunki zatorowego równania.

Przykładem będzie równanie $3x^2 - 12xy + 12y^2 = 27$. Tu mamy
 $a = 3$, $b = -6$, $c = 12$, $N = 27$. Ponieważ $b^2 - ac = 36 - 3 \cdot 12 = 0$, więc powyższe
równanie, drugie znajdziemy $(3x - 6y)^2 = 81$ czyli $3x - 6y = 9$, albo na przykład
 $x - 2y = 3$, z którego $x = 2y + 3$, a czego widzimy że y może być dowolne,
to, na dowolną nieoznaczoną, a którą chcemy wpisać liczbę całkowitą,
otrzymamy liczbę x także liczbą całkowitą, a które dwie do siebie
należą wartości x i y , sprawdzą równanie zatorowe. Wartości te

$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$
 $x = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots$

Ostatnie przy wartości $y = 3$, $3 \cdot 17^2 - 12 \cdot 17 \cdot 7 + 12 \cdot 7^2 = 27$

Przykładem będzie równanie $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 289$

Tu otrzymamy równanie pierwiastka stopnia $9x - 12y = 17$ czyli $3x - 4y = 17$
z którego znajdziemy $x = 4w + 3$ a $y = 3w - 2$; a bierzemy w dowolną liczbę
całkowitą, otrzymamy nieskończoność liczb rozwiązań zatorowego
równania, które są liczbami całkowitymi.

2^o Jeżeli $b^2 - ac < 0$, bierzemy $b^2 - ac = -d$, gdzie $d = \frac{b^2 - ac}{a}$, potoczny b w
innych warunkach równania, otrzymamy $(ax + by)^2 + dcy^2 = aN$, albo, jeżeli
 $ax + by = t$, $t^2 + dcy^2 = aN$ gdzie $t^2 = aN - dcy^2$, co dowodzi, że aby to ostatnie
równanie, ma być rozwiązane i zatorowe, musi być rozwiązane w liczbach całkowitych,
liczba N musi być dodatnią. Wtedy w ostatnim równaniu całkowite liczb
z y otrzymamy t liczbę wartości na t które są doładowymi kwadratami

Przykład Dane jest równanie $7x^2 - 4xy + 5y^2 = 287$ Je rozwiązać w liczbach całkowitych. Tu mamy $a=7$, $b=-2$, $c=5$, $N=287$. Ponieważ $b^2 - ac = -31$, będzie więc $d=31$, a więc wybieramy drogę najprościej

$$(7x - 2y)^2 + 31y^2 = 2069$$

t.j. $t = 7x - 2y$ a $t^2 = 2069 - 31y^2$

Władze tu $y=1, 2, 3, 4, \dots$ najprościej dla $y=8$, $t^2=25$, przeto $t=5$. Z temi wartościami mamy $x = \frac{t+2y}{7} = \frac{21}{7} = 3$. Olor $x=3$ i $y=8$ jest jednym rozwiązaniem podanego równania w liczbach całkowitych, jest bowiem nieorywiście $7 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 + 5 \cdot 8^2 = 287$.

Jeżeli przykład. Trzeci. całkowite wartości x i y , do których równanie kwadratowe w równaniu $11x^2 - 6xy + 3y^2 = 396$. Tu mamy $a=11$, $b=3$, $c=3$, $N=396$, jest przeto $b^2 - ac = 9 - 33 = -24$, a dlatego $d=24$, potory więc $c=3 = \frac{b^2+d}{a} = \frac{9+24}{11}$, najprościej

$$(11x - 3y)^2 + 24y^2 = 4356$$

t.j. $11x - 3y = t$ i $t^2 = 4356 - 24y^2$

Dla $y=12$, wypadła $t^2=900$, zatem $t=30$, a następnie $x=6$. Jest to rozwiązanie $11 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 \cdot 12 + 3 \cdot 12^2 = 396$.

3° Jeżeli $b^2 - ac = k^2$ t.j. jeżeli to różnica jest dodatnim kwadratem, na ten czas wystarczy jak w poprzednim przykładzie $c = \frac{b^2 - k^2}{a}$ i wtedy wystarczy, że a dzieli $b^2 - k^2$, problem jest więc otrzymany

$$(ax + by)^2 - k^2 y^2 = aN$$

czyli $(ax + by + ky)(ax + by - ky) = aN$

albo $\{ax + (b+k)y\} \{ax + (b-k)y\} = aN$

Ponieważ pierwsza strona tego równania składa się z dwóch czynników, więc jeżeli aN rozłoży się na iloczyn dwóch liczb, to jest da na dwa czynniki, nich będzie mi słowo należące do jednej z nich g i h tak że $aN = gh$, tedy wolno przyjąć

$$ax + (b+k)y = g$$

$$ax + (b-k)y = h$$

Przez rozwiązanie najprościej $y = \frac{g-h}{2k}$, tudzież $x = \frac{g-(b+k)y}{a}$

Z czynników liczb aN t.j. z czynników g i h bierze się tylko takie, które x i y czynią całkowitymi, bo to byłoby rozwiązanie podane równanie.

Tak np. w równaniu $15x^2 - 26xy + 8y^2 = 57$, mamy $a=15$, $b=-13$, $c=8$ więc

$$b^2 - ac = 49$$
, a zatem $k=7$ zaś $aN = 8 \cdot 5 \cdot 5 = 1.855 = 3.285 = 5.171 = 15.57$

Próbując tych czynników, najprościej byłoby $g=57$ i $h=15$ czynią y całkowitym bo $y = \frac{g-h}{2k} = \frac{57-15}{14} = 3$. Przechodząc więc do x mamy:

$$x = \frac{g-(b+k)y}{a} = \frac{57+18}{15} = 5$$
, zatem $x=5$, $y=3$ rozwiązuje dane równanie

Jeżeli $15 \cdot 5^2 - 26 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 3^2 = 57$.

Dla równania $11x^2 - 28xy + 12y^2 = 355$ najprościej $x=7$, $y=1$, zaś dla

równania $13x^2 + 30xy + 8y^2 = 3423$ — — — — — $x=11$, $y=5$.

4° Należy, jeżeli $b^2 - ac > 0$ t.j. jeżeli liczb dodatnia, tedy potórmy $b=-m$ a $c=-n$, a ogólnie równanie przyjmiemy następujące

$$ax^2 - 2mxy - ny^2 = N$$

w którym naturalnie $am + m^2 = b^2 - ac$ i jest liczb dodatnia a niedodatnia w kwadracie, przeciwstawnie przeto równania napoczekli przybranego, mianowicie równania $ax^2 - 2mx = n$, są jednakże tu niewymierne, rozwiązuje przeto każdy z nich naturalnie, a gdy tak jest, więc i poprzednie, przeto jest potórmy

między mianownikami P_n liczb N . Jeśli się tamery i inne onej drze,
 podane równanie będzie mogło być rozwiązaniem w liczbach całkowitych
 przeciwnie, nie może być rozwiązaniem w takich liczbach. ~~Wtedy~~ ^{Wtedy} bowiem 32
 naturalistny $ap^2 - 2mpq - nq^2 = \pm P$ ~~ale~~ $ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P$, pnie
 jeśli w dwóch równaniach $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$ i $ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P$
 drugie strony są sobie równe, wartości p i q dadzą nam jedno rozwiązanie
 równania pierwszego takie będzie $x = p$, $y = q$. Jeśli pomiędzy mianownikami
 nami P_n liczb N znajdziemy kilka razy, możemy mieć kilka wartości p i q ,
 bliższe P_n odpowiadające mianownikowi $P_n = N$, da inne nowe rozwiązania,
 same tych równania.

Przykład Dany jest równanie $3x^2 - 22xy + 15y^2 = 12$ do rozwiązania
 w liczbach całkowitych. Ze równania $3x^2 - 22x + 15 = 0$ mamy
 $x = \frac{11 \pm \sqrt{76}}{3}$; rozwijając je przed kropką ułamkową $x = \frac{\sqrt{76} + 11}{3}$ na ułamek
 ciągły, mamy:

$$\frac{\sqrt{76} + 11}{3} = 6 + \frac{\sqrt{76} + 7}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 7}{3} = 1 + \frac{\sqrt{76} + 2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{76} + 6}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 6}{3} = 2 + \frac{\sqrt{76} + 4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 4}{3} = 1 + \frac{\sqrt{76} + 8}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 8}{3} = 16 + \frac{\sqrt{76} + 8}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 8}{3} = 1 + \frac{\sqrt{76} + 4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{76} + 2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{76} + 2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{76} + 6}{3}$$

$$\begin{matrix} 6, 1, 1, 2, 1, 16, 1, 2, 1, 1, 13, 33, 46, 76, 815, 124 \\ 0, 1, 1, 1, 2, 5, 7, 11, 17, 124 \end{matrix}$$

Pomędzy mianownikami P_n znajdujemy
 liczbę 12, a ten mianownikowi odpo-
 wiadają ilorazy 1, tymczasem wartości
 przybliżone $\frac{33}{5}$ i $\frac{76}{117}$ a bliższe
 jest nam miejsce państwa, która jest
 to jest właściwa od x , a dlatego tak
 $x = 33$, $y = 5$, jako też $x = 76$ a $y = 117$
 rozwiążą nasze równanie.

$$\text{Jakoż } 3 \cdot 33^2 - 22 \cdot 33 \cdot 5 + 15 \cdot 5^2 = 12 \text{ i } 3 \cdot 76^2 - 22 \cdot 76 \cdot 117 + 15 \cdot 117^2 = 12.$$

Gdyby było równanie $3x^2 - 22xy + 15y^2 = -5$, tedy pomiędzy mianownikami
 kami P_n znajdziemy liczbę 5 takie dwa razy jak dotychczas; wartości
 przybliżone tym mianownikiem odpowiadające są $\frac{13}{2}$ i $\frac{815}{124}$
 pierwsza jest na trzecim a druga na siódmym miejscu, chociaż
 rozwiążą podane równanie. Nie rozwiążą tedy a toli równanie

$$3x^2 - 22xy + 15y^2 = 5. \text{ Jeśli } x = 13, y = 2 \text{ to } 3 \cdot 13^2 - 22 \cdot 13 \cdot 2 + 15 \cdot 2^2 = -5$$

$$\text{tworząc } 3 \cdot 815^2 - 22 \cdot 815 \cdot 124 + 15 \cdot 124^2 = -5.$$

$$\text{Równanie też } 3x^2 - 22xy + 15y^2 = 8, \text{ rozwiążą przybliżone wartości}$$

$$\frac{7}{1} \text{ i } \frac{2399}{365} \text{ t.j. } x = 7, y = 1 \text{ i } x = 2399, y = 365 \text{ i t.d.}$$

33. Do rozwiązania równania $ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$, możemy teraz
 przystąpić i do rozwiązania ogólnego równania

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad (1)$$

Naturalnie że ku inaczemu postępowaniu nie możemy, oprow. już poprzednio
 wskazanego sposobu, przekształcenia tego równania na $x^2 + Ax + B$, $u^2 - At = B$
 tylko nam się wypada postarać przekształcić to ogólne do innego, pro-
 stawiej jak w poprzednim rozwiązaniu t.j. bez wyrazów najwyższych
 pierwszego stopnia, mianowicie ilości; porożym nam się więc natych-
 miasz ogólnego równania wyrazów dy i ex . Już jakimiś spo-
 sobem tego dokądemy? Najlepiej nie innym tylko potężaniem
 na x i y pewnych wartości których temu celowi odpowiedzimy.
 Ponieważ zaś tych wartości nie znamy, więc powtórmy ogólnie
 $y = my + \alpha$ a $x = nx + \beta$. Te wartości wprowadziwszy w równanie (1)

znajdziemy:

$$am^2y'^2 + 2bmnx'y' + cn^2x'^2 + m(2a\alpha + 2b\beta + d)y' + n(2b\alpha + 2c\beta + e)x' + a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f = 0 \quad (2)$$

Ponieważ chcemy żeby wyrazy mające x' i y' w potęgach potęg zerowały się, więc chcemy żeby współczynniki ich współczynników $= 0$, co nam wolno być, gdyż d i e podaję nam sposobności oznaczenia wartości a prowadzonych dwóch nierówności α i β zaś m i n w tych współczynnikach przez siebie nie znikną. Mówiąc więc będziemy $m(2a\alpha + 2b\beta + d) = 0$, czyli $2a\alpha + 2b\beta + d = 0$ i $n(2b\alpha + 2c\beta + e) = 0$ --- $2b\alpha + 2c\beta + e = 0$ }

Z tych dwóch równań przez wyłączenie, otrzymamy

$$\alpha = \frac{cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad \beta = \frac{ae - bd}{2(b^2 - ac)}$$

Ponieważ i dwie liczby m i n są niezerowe i dowolne, więc możemy nimi rozdzielić do uproszczenia, aby było $cd - be = 1$ i $ae - bd = 1$ Prosimy przeto $m = n = \frac{1}{2(b^2 - ac)}$, a wtedy nasze otrzymane

$$y = my' + \alpha = \frac{y' + cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad x = nx' + \beta = \frac{x' + ae - bd}{2(b^2 - ac)}$$

Takie były wartości potęg naley za x i y w równaniu (1) a ich wyrazy o nierówną potęgę, niezerowych zerowały. Ale x i y mają być całkowitymi, więc z tych ostatnich wartości, jeżeli to w ogólności być może, tak je wyrażymy naley, żeby były w postaci liczb całkowitych, co jedynie od współczynników a, b, c, d, e , jak widzimy zależy. Ale w przekształceniu równania (2) przesyłają się one do obrotu, chowania wyrazów ostatni który zawiera α i β . Przekształćmy więc wyrazy te go przez współczynniki równania (1). W ten sposób przekształćmy równanie (2) rozmnóżmy przez α a drugie przez β i dodajmy, a otrzymamy

$$2a\alpha^2 + 4b\alpha\beta + 2c\beta^2 + d\alpha + e\beta = 0 \quad \text{gdyż} \quad a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = -\frac{d\alpha + e\beta}{2} \quad \text{z równania (1)}$$

Teraz w równaniu (2) w ostatnim wyrazie potęgamy tę wartość, znajdziemy $a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f = d\alpha + e\beta + f - \frac{d\alpha + e\beta}{2} = \frac{d\alpha + e\beta}{2} + f$

Potęgamy tu teraz wartości powyższe α i β , znajdziemy ten ostatni wyraz $= \frac{cd^2 - 2bde + ae^2}{4(b^2 - ac)} + f$. Potrimy więc $cd^2 - 2bde + ae^2 = M$

a $b^2 - ac = N$, tedy nasze wyrażenie będzie $= \frac{M}{4N} + f$. Lecz $m^2 = n^2 = \frac{1}{4(b^2 - ac)^2} = \frac{1}{4N^2}$

więc ponieważ $mn = \frac{1}{4(b^2 - ac)^2} = \frac{1}{4N^2}$, więc ostatni wyraz sprowadzimy do tego samego mianownika będzie $= \frac{MN + 4N^2f}{4N^2}$, a opuszczając potem kłopotliwy mianownik, przekształcimy równanie nasze na

$$ay'^2 + 2bx'y' + cx'^2 + 4N^2f + MN = 0$$

t.j. równanie postaći już poprzednio rozważaliśmy.

Przykład. Niech nam danem będzie równanie

$$5y^2 - 6xy + 3x^2 - 40y + 12x + 102 = 0$$

Wskazujemy sposób, znajdziemy $y = \frac{y' + cd - be}{2(b^2 - ac)} = \frac{y' - 84}{-12}$, $x = \frac{x' + ae - bd}{2(b^2 - ac)} = \frac{x' - 60}{-12}$

Dla ułatwienia sobie rachunku, ponieważ x i y mają być całkowitymi, możemy potęgmy $\pm 12y'$ oraz $\pm 12x'$ za x' i y' w potęgach przez siebie otrzymamy

$y = -y' + 7$, $x = -x' + 5$ w drugim zaś $y = y' + 7$, $x = x' + 5$. Te ostatnie wartości potęgamy w danym równaniu, wyrazy mające potęgę potęg zerują się, więc

x i y znikną, a poprzednie przekształcone równanie otrzymamy w obu postaciach

$$5y'^2 - 6x'y' + 3x'^2 = 8$$

W tym równaniu jest $b^2 - ac < 0$, zatem jak wiemy, ponieważ $b^2 - ac = -6 = -6$ zatem

zatem $(5y' - 3x') + 6x'^2 = 8$, $5y' - 3x' = t$, a $t^2 = 40 - 6x'^2$. Dla $x' = 2$ jest

$t = 4$, przeto $y' = 2$ a nareszcie $y = \pm 4 + 7$ t.j. $y = 9$ lub 5 , $x = \pm 2 + 5$ t.j. $x = 7$ lub 3 . Tak więc są to i drugie wartości prawdziwe równanie.

Dobrze tu uważać należy że ~~ma~~ wprowadzamy warunek że y' i x' będą ± 124 za y' a ± 128 za x' , gdyż byśmy rachowali ostatnie wyraz pęcherzowego równania, który to pęcherzowy - 8, zatem ~~liczyliśmy~~ go $= 1152$ t.j. 144 razy więcej. Ten sam wyraz otrzymaliśmy ~~z~~ z pęcherzowym równaniem $\frac{y'}{2}$ za y' i $\frac{x'}{2}$ za x' .

Przykład drugi. Równanie $13y^2 + 28xy + 5x^2 - 80y - 66x + 33 = 0$ rozwiąż, nie w pierwiastkach całkowitych. Tu mamy $a=13, b=14, c=5, d=-80, e=-66, f=33$ zatem $y = \frac{y'+cd-be}{2(b^2-ac)} = \frac{y'+524}{262}, x = \frac{x'+ae-bd}{2(b^2-ac)} = \frac{x'+262}{262}$. Atakując y i x mają być całkowite, dołączymy więc do liczników potęgimy $262y'$ za y' , a $262x'$ za x' , tym samym sposobem otrzymamy $y = y' + 2$ a $x = x' + 1$, które warunek potęgimy w danym równaniu, znajdziemy $13y'^2 + 28x'y' + 5x'^2 = 80$.

Skoro więc rozwiążemy to równanie w pierwiastkach całkowitych, otrzymamy, że y i x całkowite rozwiążemy równanie ratowane. ~~W tym równaniu jest~~ $b^2 - ac = 131$ t.j. $b^2 - ac > 0$, a to, co jest prawą stroną 14. ^{§32} t.j. potrzeba atomów ciągłych. Atoli w przedmiejscu, gdzie jest jego strona, przywieść do najprostszego wyrażenia, miało być, że y i x współczynnik średniego wyrazu 28 przy najmniejszej wartości y i x współczynników wyrazów skrajnych 13 i 5 a w połączeniu z $b^2 - ac$ po prostu nie naruszają, do tego celu, ponieważ dla współczynników skrajnych, mniejsze niż niechcimy średnie, może być nam uciążliwym, ponieważ niechcimy średnie, mniejsze niż skrajne. Dlatego potrójmy $x' = x' - 1$ i znajdziemy $(5n^2 - 28n + 13)y'^2 - (10n - 28)x'y' + 5x'^2 = 80$.

Tu, ponieważ n jest nieznaczącym, można też n brać obrotów 10n-28 będzie mniejszym niż 5 a tym samym, mniejszym niż 13. Zatem, w tym wyraz $n=3$, znajdziemy $-26y'^2 - 2x'y' + 5x'^2 = 80$ albo $26y'^2 + 2x'y' - 5x'^2 = -80$ gdzie niechcimy $b^2 - ac = 131$ a współczynnik średni jest mniejszym niż dla skrajnych. W przeciwnym razie, gdyby było drugie skrajne współczynnik byłby mniejszym od średniego, potrzeba by było samo pęcherzowe wyrażenie dla drugiego współczynnika. Karda więc warunek jest taki, że $x' = x' - 34$ rozwiążemy ostatnie równanie rozwiążemy, i poprzednie, a następnie warunek $y = y' + 2$ i $x = x' + 1$ rozwiążemy równanie ratowane w pierwiastkach całkowitych.

Chcąc rozwiązać ostatnie równanie, potrzebnym jest warunek, aby x' i 80 nie miały żadnego wspólnego dzielnika, czyli raczej, żeby były względnie pierwsze. Atoli, niechcimy, wzmocnić x' w połączeniu widzimy, że $80 = 16 \cdot 5$, więc nawet dla uproszczenia, równania potrójmy, można i należy $4y'$ za y' a $4x'$ za x' pociągamy równanie uproszczone $26y'^2 + 2x'y' - 5x'^2 = -5$.

Najle do tego słajnia uproszczone równanie, którego całkowite, że warunek y', x' dadzą nam takie całkowite y' i x' , a to, co jest, całkowite y' i x' narodzi się ostatnie dadzą również całkowite y i x rozwiążemy równanie ratowane, nie posłajmy, nie innego jak tylko, jeżeli niechcimy pierwiastki równania $26x^2 + 22x - 5 = 0$ rozwiążemy na atomach ciągłych i zobaczymy, które ilorazy są całkowite, mają mianownik 5. Ponieważ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{131}}{26}$, więc rozwiążemy metodą $\frac{-1 \pm \sqrt{131}}{26}$.

na atomach uizgty będzie

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{131}-1}{26} &= 0 \\ \frac{\sqrt{131}+1}{5} &= 2 \\ \frac{\sqrt{131}+9}{10} &= 2 \\ \frac{\sqrt{131}+11}{1} &= 22 \\ \frac{\sqrt{131}+11}{10} &= 2 \\ \frac{\sqrt{131}+9}{5} &= 11 \\ \frac{\sqrt{131}+11}{2} &= 11 \\ \frac{\sqrt{131}+11}{5} &= 4 \\ \frac{\sqrt{131}+9}{10} &= 2 \\ \frac{\sqrt{131}+11}{1} &= 22 \\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

Wartości przybliżone tego atomka będą

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 2 & 22 & 2 & 4 & 11 & 4 & 2 & 22 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{45}{112} & \frac{92}{229} & \frac{413}{1028} & \frac{4635}{11537} & \frac{18953}{47176} & \frac{42541}{105889} & \text{i t. d.} \end{array}$$

Wzrzućmy tych ilorazach widimy mianownik 5, odpowiadającemu ilorazowi 2, potem dalej. dwóm ilorazom pierwszy 4, odpowiadającemu mianownikowi 5, zatem wartości przybliżone $\frac{0}{1}$, $\frac{92}{229}$, $\frac{4635}{11537}$ i t. d. rozwiązywać ostatnie równanie. Ale abyśmyślić mianownikowi 5, na mianownik nieparzysty, więc rozwiązywać równanie ocałkiem — t. j. tak jak się kończy równanie przedostatnie. Tak więc pierwszemu rozwiązaniu $y''=0$, $x''=1$, drugi $y'=4y''=0$, $x'=4x''=4$, a następnie $x=x'-3y'=4$, a następnie $y=y'+2=2$, $x=x'+1=5$. Drugie rozwiązanie ostatniego równania, jest $y''=92$, $x''=229$ z których tak jak poprzednio przyjdziemy do wartości $y=360$, $x=1187$, rozwiązywać równanie dalej z wartością $y''=4635$, $x''=11537$ przyjdziemy do $y=18542$, $x=47176$ i t. d. Terciego, następnego przypadku otrzymamy dwa rozwiązania a i b nieporównywalne.

$$\begin{aligned}y &= 370 \\ x &= -187\end{aligned}$$

Drugi z pierwiastków t. j. $\frac{-1-\sqrt{131}}{26}$ jak widimy jest odjemnym, ponieważ pierwszy mianownik jest — $\frac{\sqrt{131}+1}{26}$ i rozwiązywać na atomach uizgty, czyli spakować najgłębszych ilorazów raportu, a potem wartości przybliżonych, znajdziemy że rozwiązywać ostatnie równanie i uogólnione równanie są:

$$\begin{aligned}-\frac{0}{1}, -\frac{11}{23} \text{ i } -\frac{4635}{9683} \text{ t. j. } y''=0, x''=1; \text{ drugie } y''=-11, x''=23 \text{ a trzecie } \\ y''=-4635, x''=9683. \text{ Wracając zaś do wartości } y' \text{ i } x' \text{ rozwiązywać równanie} \\ \text{nie zależne, znajdziemy takowe, raportu tym samym co wyżej sposobem} \\ y=2, x=5; y=-42, x=2253 \text{ i } y=-18538, x=104353. \text{ Z następnych} \\ \text{przypadków otrzymamy dalsze rozwiązania do nieskończoności.}\end{aligned}$$

§ 311. Tym tedy sposobem rozwiązywać się będzie inne równanie sferycznego mianownika $P(b^2-ax)$ albo też pierwszorzędne przekształcenie może być wprowadzone do sferycznego. Ale jakie rozwiązanie równanie $ay^2+bx+cx^2=P$ gdzie P może być parzystym lub nieparzystym i w którym $b^2-ax > 0$ i niekwadrat zupełny, ale $P > b^2-ax$? Oto w takim przypadku możemy

$$\text{można } y = nx + P_2$$

a potęgą przy tej wartości w danem równaniu, znajdziemy

$$\frac{an^2 + bn + c}{P} x^2 + (2n + b)x + Pz^2 = \pm 1$$

Szukajmy wartości na n takiej aby $\frac{an^2 + bn + c}{P}$ było liczbą całkowitą, jeżeli szukamy nieznajdziemy w granicach $-\frac{1}{2}P$ i $+\frac{1}{2}P$, wtedy z upoś. na pewno już stwierdzić możemy że dane równanie nie może być rozwiązane w liczbach całkowitych. Jeżeli zaś znajdziemy więcej takich wartości, z każdą potrzebą odbyć następny rachunek. Potęgą przy jednej z tych wartości w ostatecznem równaniu, otrzymany równanie do rozwiązania pozostać

$$fx^2 + gx + Pz^2 = \pm 1$$

Rozwiązujemy na utomach ciągły każdy z pięciu sposobów prowadzenia

$$fx^2 + gx + P = 0$$

znajdziemy przybliżoną wartość odpowiadającą szukanemu ile, warowi w którym $P_n = 1$, która będzie wartością $\frac{1}{2}$ tak że oznaczmy ją przez P_n , będzie $x = p$, $z = q$ które wartości rozwiążą równanie $fx^2 + gx + Pz^2 = \pm 1$. Z wartości n, x, z , znajdziemy takie q całkowite i tym sposobem znajdziemy jedno rozwiązanie. Ponieważ utomach ciągły którego się szukało x i z jest pierwiastkiem, więc następnym pierwiastkiem będzie inne rozwiązanie tym samym sposobem.

Mozemy na dyktis braci następujący przykład. Równanie

$$13y^2 - 28xy + 5x^2 + 3y + 2x + 8z = 0$$

rozwiązać w liczbach całkowitych. Wypróbowujemy najpierw w pełni potęgami y i x , znajdziemy wiadomo drogę, że potrzeba potęg $y = \frac{y' + 43}{262}$ a $x = \frac{x' + 68}{262}$; co myślnie wstawiając przyjdzie nam do równania

$$13y'^2 - 28x'y' + 5x'^2 = -6006743$$

Tu jest $b^2 - ac = 14^2 - 13 \cdot 5 = 131$ a.j. dodatnie, nie jest liczbą kwadratem, zaś $P = -6006743$ a.j. $P > b^2 - ac$ nie ma już wyjścia na zewnątrz. Liczba 6006743 składa się z dwóch czynników pierwszych 131 i 45853 nie da się więc pogłębić do przypuszczenia drugiego stopnia równania była mniejsza niż 131. Nie poróżajmy nam więc nic innego tylko do ostatecznego równania potęgą

$$y' = nx' - 6006743x'$$

pono co otrzymamy

$$\frac{13n^2 - 28n + 5}{6006743} x'^2 - (26n - 28)x' + 78087659z^2 = -1$$

Szukajmy teraz wartości na n , w granicach -3003372 i $+3003372$, takiej liczby, która by $\frac{13n^2 - 28n + 5}{6006743}$ dała nam liczbę całkowitą. Nie łatwo to jest ratować nie spowoduje o nią nowich jest podobne, liczbę i składa się tylko z dwóch czynników pierwszych jak wyżej powiedziano. W nadmiarze próbach przy użyciu innych narzędzi od analizowania $n = -2374646$ i to jest najmniejsza liczba czynników powyższych, które liczbą całkowitą, która z wartości n potęgą przy w ostatecznem równaniu, znajdziemy

$$12204007x^2 + 61740824x + 78087659 = -1$$

Do tego stanu doprowadziły równanie, które byśmy teraz rozwinięli. Dwa pierwiastki równania $12204007x^2 + 61740824x + 78087659 = 0$ na atomek ciągły aby znaleźć wartości x i z rozwiązywać powyższe równanie. Pierwiastkami oddzielnego równania są

$$x = \frac{-30870412 \pm \sqrt{131}}{12204007}$$

ale na tem odjemne. Rozwijając pierwiastek największy, mamy

$$- \frac{30870412 + \sqrt{131}}{12204007} = 2$$

$$\frac{6462398 - \sqrt{131}}{3422039} = 1$$

$$\frac{3040359 + \sqrt{131}}{2701250} = 1$$

$$\frac{339109 - \sqrt{131}}{47571} = 7$$

$$\frac{41112 + \sqrt{131}}{39703} = 1$$

$$\frac{1409 - \sqrt{131}}{50} = 27$$

$$\frac{\sqrt{131} + 59}{67} = 1$$

$$\frac{\sqrt{131} + 8}{1} = 19$$

Substytuując wartości przybliżone, znajdziemy odpowiadającą ostatniemu ilorazowi $-\frac{1242}{491}$. Wziąwszy więc $x = 12112$ a $z = -491$,

znajdziemy $y = 481$. Proba

$$y = \frac{y+43}{262} = \frac{481+43}{262} = \frac{524}{262} = 2, x = \frac{x+68}{262} = \frac{1242+68}{262} = \frac{1310}{262} = 5$$

Wartości te rozwiązują rzeczywiste rationale równanie. Chyba otrzymamy inne rozwiązania, potrzeba by szukać innych wartości n i m i innych wartości warunkowi $\frac{13n^2 - 28n + 5}{6006743} = \text{liczba całkowita}$; bo rozwiązanie drugiego rzeczywistego równania, doprowadzi nas tylko do tychże samych wartości x i z . W następnych ataki przyjdzie obu atomów ciągłych, znajdziemy niechcący irom, liczb rozwiązania. Chociaż bowiem w powyższym rozwinięciu nie widzimy prawa według którego postępowały ilorazy, to przecież w następnych i dalszych przyjdzie do prawa wysługu i wygubnie, bo po ostatnim 19, następny ilorazy 2, 4, 11, 4, 2, 22, 2, 4, 11, 4, 2, 22, i t. d.

§35. Wiaty tej roboty nie maż nie trudnego jedynie szukanie liczb n .

Wskazujemy odwarzyć na próbowanie w tym samym przypadku, gdzie mianownik 6006743. Stada jest tylko z dwóch pierwiastków irom irom,

wspierstich liczb, pierwszą od 1 aż do 2374646 tak do dalsze jak

odjemnie? A chociażby sobie można nieco ułatwić i skrócić tę robotę

substytuując takiej wartości n w którąby dwa poprzedzenia

$\frac{13n^2 - 28n + 5}{131} : \frac{13n^2 - 28n + 5}{45853}$ uorynita liczbami całkowitemi, to pro-

cież i tak wypadła próbować liczb od 1 do 22926 która próba od-

szkapytały każdego najcięższego irom irom. Takadziendo

pytanie, czyli by tak moralnego rachunku jakim sposobem uoryn-

usi nie można? Ja na to odpowiadam, że jeżeli się chcemy zastanowić

Jak Holwich
można wykła-
czyć a pod p-
być może więcej
nie potowa-
tych liczb.

w pierbach catkowitych, na tenorach sie maza inuogo sposobu
trafienia nie myslac do celow, wielu aloli. przy padkach, przegolniny
gdz w potorynniki pierwotnego rownania nie sa wielkosciami
pierbami, moze jst latwiejszy i prostszy sposob podany przez
Eulera w "Commentationes arithmeticae collectae Petropoli 1849"
na stron. 549 tomu I. Sposob jego polega na tym aby przy
probowaniu znalezi jedno rozwiązanie danego rownania a potem
przy pomocy tego znalezi inne jak nastepuje:
Przypuszcmy ze $y=m$ i $x=n$ rozwiązuje rownanie

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

taki ze

$$am^2 + 2bmn + cn^2 + dm + en + f = 0$$

bedzie

$$a(y^2 - m^2) + 2b(xy - mn) + c(x^2 - n^2) + d(y - m) + e(x - n) = 0$$

Oznacze kwadraty potorynniki na oznaczki, tudziez potorynniki
 $2b(xy - mn) = b(y - m)(x + n) + b(y + m)(x - n)$, a nastepnie oznaczmy
punkty miedzy $y - m$ i $x - n$ taki ze $\frac{y - m}{x - n} = \frac{p}{q}$, skąd $qy - qm = px - pn$,
stymamy $(y + m)(ap + bq) + (x + n)(bp + cq) + dp + eq = 0$

z tego i poprzedniego rownania uzyskuje x a potem y , znajdujemy

$$y = \frac{-m(ap^2 - cq^2) - 2n(bp^2 + cpq) - dp^2 - epq}{ap^2 + 2bpq + cq^2}$$

$$x = \frac{n(ap^2 - cq^2) - 2m(bp^2 + cpq) - dpq - eq^2}{ap^2 + 2bpq + cq^2}$$

Te aloli wartosci będa pod postacia ułamkow, w tedy tylko będa
catkowitymi, gdy liczniki obu ułamkow nie będa podzielne przez
mianownik. Temu warunkowi w tedy tylko stae przydaje, je-
wno radzyc, gdy $ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm 1$, inne zaś przypadki mo-
we sa nie pewne bo tylko probowal potrzeba roznych p i q ,
wartosci dopoki sie nie natrafi na takie p i q jakich x i y
catkowite, w pelni bowiem inne aloli wartosci tylko wyliczmy.

Zastanowimy tylko wyprawa, ze w przypadku $b^2 < ac$ czyli $b^2 - ac < 0$ (tym sposobem
t.j. gdy ta ilosc jest ujemna, danego rownania nie mozna roz-
wiazac w pierbach catkowitych).

Analizone z powyższych wzorow wartosci y i x potorynniki
w tych samych wzorach za m i n , znajdujemy nowe rozwi-
zanie, a ktorim postepnie maly jak z poprzednim i tym spo-
sobem z kazdego nowo otrzymanego, znajdujemy będnym na-
stępnym rozwiązanie.

Jeżeli tu maly powiedzie o rownanie warunkowem
 $ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm 1$ i w tedy tylko analize (wartosci p i q
sprawdzajac to rownanie, gdy pierwotne rownanie
 $ap^2 + 2bp + c = 0$ sa rozelnymi t.j. jeżeli $b^2 - ac$ jest iloscia du-
latna; dlatego to przewidziat sie wyzej ze gdy $b^2 < ac$ dane
rownanie nie moze byc rozwiżanem w pierbach catkowitych.

Dla objasnienia tego postepowania, wozmy poprzednio roz-
wiazane rownanie $13y^2 - 28xy + 5x^2 + 3y + 2x + 8 = 0$. Napi-
szemy je nastepnie $y(13y + 3) + x(5x + 2) = 28xy - 8$, widzimy

takie jest otrzymanie do rozwiązania równania trygonometrycznego

$$u^2 = 2096t^2 + 9537424$$

Którę nas teraz, że dany jest wyraz ten, warunek ten jest drugi
jego strona była do kwadratu. Teraz ułóżmy, że jest takim wyrazem
czyli u i t, mamy więc x i y takie, że $x^2 + y^2$ jest takim wyrazem, że
mamy więc podane równanie w takich liczbach.

Oto, jeżeli A i B nie są wielkimi liczbami, przez próbowanie
można dość łatwo znaleźć i wielkie. Toż samo warunek ten
można drugą stroną trygonometryczną równania do kwadratu
kwadratu. W naszym przypadku, lubo nie tak łatwo, ale
A i B są dość małymi liczbami, więc można próbować najpierw
 $t = \pm 85$ a o b warunek ten, $u = 4968$. Potem spróbujmy
próby rozwiązać $t = \pm 85$, $k = 4968$, mamy

$$u^2 - 2096t^2 = 9537424, \text{ tudzież } k^2 - 2096h^2 = 9537424$$

skąd $u^2 - 2096t^2 = k^2 - 2096h^2$. A jeżeli jeszcze spróbujemy
dwie strony, mianowicie $m^2 - 2096n^2 = 1$, to jest Cauchy'ego,
two, więc dla każdego $u^2 - 2096t^2 = (k^2 - 2096h^2)(m^2 - 2096n^2)$.

Potoczemy tu $u = km - 2096hn$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} k^2m^2 - 2 \cdot 2096hkmn + 2096^2h^2n^2 - 2096t^2 &= \\ = k^2m^2 - 2096k^2n^2 - 2096h^2m^2 + 2096h^2n^2 &= \\ \text{t.j. } t^2 = h^2m^2 - 2hkmn + k^2n^2 = (hm - kn)^2 &= \end{aligned}$$

$$\text{adom } t = hm - kn.$$

W naszym przypadku rozwiązania $\sqrt{2096}$ na utomach
wielkości, najpierw $m = 225144199$, $n = 4917735$.

W ten sposób mamy ogólną wyrażenia na u i t
jak następuje: $u = 225144199k - 10307572560h$
 $t = 4917735k - 225144199h$

Potoczemy tu wartości, wyjdzie próbowanie $h = 85$
 $k = 4968$. Które wartości z równań $u = 10488 - 277$
 $t = 264 - 28x + 3$, dając $y = 2$, $x = 5$, znajdziemy nowe roz-
wiązanie $x = 231271673$, $y = 452679131$.

Chcąc znaleźć dalsze rozwiązania, potrzeba w ostatnich
rozrach potoczyć za k to co się znalazło na u, a za h to
co się znalazło na t, a potem z nowo otrzymanymi roz-
różnieniami u i t szukać nowych x i y. i t.d. F

F. J. S. p. o. c.
rozwiązania,
ogólnego roz-
wiązania, odpo-
wiada, albo ra-
czej jest tym sa-
mym jak i f. s.
15, i 16.

§ 37. Jeżeli w równaniu $ay^2 + 2bx + cx^2 + dx + ex + f = 0$, $b^2 - ac = 0$, podaje się

natenczas równanie tego nie można rozwiązać w liczbach całkowitych.
Nowych jednak zadanych poprzednio podanych sposobów. W takim
razie rozwiązywać to równanie przez dodawanie do
jego lewej strony jego strony b^2dx , otrzymamy

$$(ay + bx)^2 + d(ay + bx) + (ae - bd)x + af = 0$$

A potoczemy $ay + bx = z$, otrzymamy równanie

$$z^2 + dz + (ae - bd)x + af = 0$$

w którym jedna z niewiadomych jest w stopniu pierwszym a druga
w wyższym; jeżeli więc naszymi poprzednimi sposobami
zobaczymy, że to jest nierozwiązywalne, to jest nie-
rozwiązywalne. (bowiem)

$$x = - \frac{ay + dz + z^2}{ae - bd}$$

Skoro więc x ma być liczbą całkowitą, należy, biorąc dowolne wartości z , takie tylko zatrzymywać, które nie tylko x czyni całkowitą ale też i y w równaniu $ay + bx = z$, t.j. takie które przez a są podzielne.

Ogarnijemy to rozrządzą układem. Niekiedy nam podano było do rozwiązania w liczbach całkowitych równanie

$$6y^2 - 36xy + 54x^2 + 7y - 5x - 23 = 0, \text{ w którym } b^2 - ac = 18^2 - 6 \cdot 54 =$$

tedy według tego co powiedziano będzie

$$36y^2 - 6 \cdot 36xy + 6 \cdot 54x^2 + 7 \cdot 6y - 7 \cdot 18x - 30x + 7 \cdot 18x - 138 = 0$$

$$\text{czyli } (6y - 18x)^2 + 7(6y - 18x) + 96x - 138 = 0$$

$$\text{a stąd } 6y - 18x = z$$

$$z^2 + 7z + 96x - 138 = 0$$

$$\text{skąd } x = \frac{138 - 7z - z^2}{96}$$

Ponieważ $y = 3x + \frac{z}{6}$, musi być tylko wartości zatrzymamy na z które x czyni całkowitą a zarazem są podzielne przez 6.

Stądże dla $z = 0, 1, 2, 3, \dots$ znajdziemy $z = 42$, która wartość daje $x = -26$ a potem $y = -53$. Wartości $z = -54$, da nam wartości $x = -25$, $y = -84$. Podobnie, wartości $z = -150$, da wartości

$$x = -222, y = -641 \text{ i t.d.}$$

Podobnie, gdyby nam podano do rozwiązania w liczbach całkowitych równanie

$$11y^2 - 66xy + 99x^2 - 50y - 88x - 994 = 0 \text{ w którym } b^2 - ac = 33^2 - 11 \cdot 99 = 0, \text{ tedy podobną powiniemy wziąć drogę, stąd } 11y - 33x = z$$

$$\text{skąd } xy = 3x + \frac{z}{11}, \text{ przyjdzie do równania}$$

$$z^2 - 50z - 2618x - 10934 = 0 \text{ z którego } x = \frac{z^2 - 50z - 10934}{2618}, \text{ gdzie}$$

próbuje różne wartości na z tak dodatnie jak i ujemne i zatrzymujemy tylko tylko które przyjdzie do podzielenia przez 11 i zarazem czyni x liczbą całkowitą, znajdziemy różne rozwiązania podanego równania w liczbach całkowitych. Takie są dla $z = -132$, znajdziemy

$$x = 5, y = 3; \text{ dla } z = -770, \text{ otrzymamy } x = 237, y = 641 \text{ i t.d.}$$

W próbowaniu różnych wartości z można wyhodować równanie $z^2 - 50z - 10934 = 2618\alpha$, gdzie α oznacza każdą liczbę całkowitą. A ponieważ z tego równania wypada

$$x = 25 \pm \sqrt{2618\alpha + 1559}$$

należy pisać że α może być różne liczbą całkowitą do zera, dopóki sumy pod znakiem pierwiastkowy nie będzie zupełnym kwadratem.

Z tak pierwszą wartość $z = -132$ znajdziemy stąd że $\alpha = 5$, drugą zaś $z = -770$, skoro półożymy $\alpha = 237$. Ale to jest rachunek raczej morderczy, nie da się zaprzeczyć; skoro jednak inną pewną drogą nieznasz, to raczej potrzebny wypad że ponownie podjęć.

Na powrót już wspomnieliśmy że w obecnym pracy podam tylko to co jest najważniejszą w rozwiązywaniu sąsiednich nierozwiązanych równań do równań drugiego stopnia z dwiema niewymiernościami. Nie chcę, pisać że nim, nie poświęcę czasu na rozrachunek do druku prędko, bo mój szanowny i szlachetny brat, który to pisał, nie uważa za wybrednie powściągliwym, ale raczej jako szlachetny i onieśmielony.

Fale dźwiękowe i optyczne i ich właściwości
również i magnetyzm i prąd
Kronika

caru
noi le
u.

to 8

b. 54 =

o

camp

ince

arnot

waru

waru

atlica

shlo

utad

a

urii

ymuff

ymis

ovuna

my

d.

re m

attho

numa

.

ngz

nech

newng

iges

to co

h. 100

ilhou

here

orali

niif

